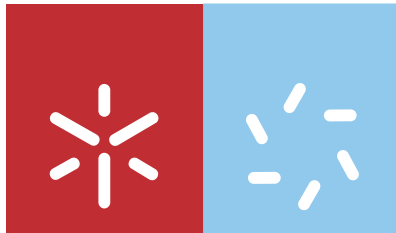


Universidade do Minho
Escola de Ciências

Maria Isabel Ferreira Rodrigues

**Projecções Cartográficas:
Estudo Matemático das Representações
Planas de uma Esfera**



Universidade do Minho

Escola de Ciências

Maria Isabel Ferreira Rodrigues

**Projecções Cartográficas:
Estudo Matemático das Representações
Planas de uma Esfera**

Mestrado em Matemática - Formação Contínua de Professores

Trabalho efectuado sob a orientação da
Professora Doutora Lucile Vandembroucq

DECLARAÇÃO

Nome: Maria Isabel Ferreira Rodrigues

Endereço electrónico: isabelferreirarodrigues@yahoo.com

Número do Bilhete de Identidade: 9776296

Título da dissertação/tese - Projeções Cartográficas: Estudo Matemático das Representações Planas de uma Esfera

Orientadora: Professora Doutora Lucile Vandembroucq

Ano de conclusão: 2011

Designação do Mestrado: Mestrado em Matemática-Formação Contínua de Professores

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE/TRABALHO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, 30/01/2011

Assinatura: _____

Agradecimento

À Professora Doutora Lucile Vandembroucq pelos seus inestimáveis apoio e incentivo e pelas suas valiosas sugestões científicas, fundamentais para a realização desta dissertação.

Projecções Cartográficas: Estudo Matemático das Representações Planas de uma Esfera

Resumo

Para se elaborar um mapa de uma região da Terra, suposta esférica, associa-se a cada ponto dessa região um ponto de um plano. Tal aplicação, designada *projecção cartográfica*, deve, para o mapa ter interesse, possuir algumas características como, por exemplo, preservar os ângulos e/ou as áreas. O principal objectivo desta dissertação é apresentar um estudo matemático, acompanhado de uma perspectiva histórica, das projecções cartográficas através dos conceitos da Geometria Diferencial. Em particular, será apresentada a demonstração do Teorema *Egregium de Gauss* - teorema que permite afirmar que qualquer mapa plano, de qualquer região da Terra, distorce sempre as distâncias.

Importantes exemplos de projecções cartográficas são estudados detalhadamente, entre os quais, a projecção estereográfica e a projecção de Mercator.

Map Projections: A Mathematical Study of Flat Representations of a Sphere

Abstract

In order to create a map of a region of the Earth, supposed spherical, a point on a plane is associated with each point in this region. This application, called *map projection*, should have certain characteristics, such as preserving the angles and/or areas, for the map to be of interest. The main aim of this dissertation is to present a mathematical study of cartographic projections together with a historical perspective, through the concepts of Differential Geometry. In particular, it will present a proof of *Gauss's Theorem Egregium*, which allows us to assert that any flat map of any region on Earth will always distort distances.

Important examples of map projections are studied in detail, including the stereographic projection and the Mercator projection.

Conteúdo

Introdução	1
1 Um Breve Olhar sobre a Evolução Cartográfica	5
2 Superfícies	13
2.1 Definições e Exemplos	13
2.2 Alguns Resultados Técnicos	19
2.3 Parametrização da Esfera e do Cilindro	24
2.4 Aplicações entre Superfícies e Difeomorfismos	28
2.5 Plano Tangente e Orientação de uma Superfície	30
3 Projecções Cartográficas	35
3.1 Projecção Estereográfica	36
3.2 Projecções Cilíndricas	39
3.2.1 Projecção de Arquimedes	46
3.2.2 Projecção Cilíndrica Central	47
3.2.3 Projecção Equidistante Meridiana	49
3.2.4 Projecção de Mercator	50
3.3 Contribuição de Pedro Nunes e outros Matemáticos insígnies para a Projecção de Mercator	52
4 Comprimentos, Ângulos e Áreas - Primeira Forma Fundamental	55
4.1 Comprimento de uma Curva numa Superfície	55
4.2 Ângulo entre duas Direcções numa Superfície	60

4.3	Área de uma Porção de Superfície	65
4.4	Isometrias, Mapas Conformais e Equiareais	68
5	Aplicação de Gauss, Curvatura e Teorema <i>Egregium de Gauss</i>	77
5.1	Aplicação de Gauss e suas Propriedades	78
5.2	Segunda Forma Fundamental	81
5.3	Símbolos de Christoffel	89
5.4	Teorema <i>Egregium de Gauss</i>	94
6	Propriedades das Projecções Cartográficas	97
6.1	Propriedades da Projecção Estereográfica	97
6.2	Propriedades das Projecções Cilíndricas	105
6.2.1	Projecção de Arquimedes	105
6.2.2	Projecção Cilíndrica Central	107
6.2.3	Projecção Equidistante Meridiana	109
6.2.4	Projecção de Mercator	111
7	Ciências Exactas e Humanas - Proposta de Articulação	115
	Bibliografia	124

Introdução

Os mapas exercem um enorme fascínio sobre as pessoas - fascínio que advém da sua beleza gráfica e, sobretudo, do facto de serem um instrumento imprescindível à localização de um determinado lugar no mundo em que vivemos.

Mas afinal o que é um mapa?

“Chama-se *mapa* a uma qualquer figuração plana da superfície da Terra, ou de outro corpo celeste, na qual são representadas as posições relativas dos vários objectos, numa determinada *escala* e numa determinada *projecção cartográfica*.” [6]

Existe uma grande variedade de transformações da esfera no plano, cada uma delas dando origem a um tipo de mapa. Contudo, a representação da superfície de uma esfera, no todo ou em parte, sobre uma superfície plana, não é tarefa simplista; antes se reveste de alguma complexidade.

É objecto da matemática formular relações que permitam representar a superfície terrestre num plano, o que conduziu, desde sempre, a uma forte correlação entre a Cartografia e a Geometria, em especial a Geometria Diferencial. Na verdade, a ânsia dos cartógrafos na busca de uma projecção *ideal* forçou os matemáticos a estudarem em detalhe uma superfície - a esfera. Estes estudos deram origem aos resultados fundamentais da teoria geral das superfícies. Foi Euler quem forneceu bases sólidas à teoria das superfícies em *Recherches sur la Courbure des Surfaces* (1760) e quem em 1777 publicou três artigos sobre cartografia matemática (E490: *On the representation of a spherical surface on the plane*; E491: *On the geographic projection of the surface of a sphere*; E492: *On De Lisle's Geographic Projection and*

Its Use in the General Map of the Russian Empire), considerados incontornáveis contributos para a fundamentação matemática da Cartografia.

Em 1827, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicou a sua famosa obra *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*. Nesta publicação, Gauss apresenta, entre outras coisas, uma demonstração de um teorema que o próprio designou de *Egregium*. Uma consequência imediata deste teorema será a de não existir nenhuma isometria entre uma região de uma esfera e uma região de um plano, razão pela qual qualquer mapa plano de qualquer região da Terra distorce sempre as distâncias. Deste modo, os cartógrafos que durante muito tempo ansiaram descobrir um mapa que preservasse, na mesma escala, as distâncias entre os vários locais da Terra, foram esclarecidos de que tal pretensão é impossível de alcançar.

O principal objectivo desta dissertação é apresentar um estudo matemático, por menorizado, das principais transformações da esfera no plano: as designadas *projectões cartográficas*. Para se verem cumpridos os objectivos do presente estudo, foram introduzidos, ao longo do trabalho, vários resultados sobre superfícies, que fundamentam o estudo teórico das projectões. O estudo teórico será contextualizado numa perspectiva histórica.

No primeiro capítulo, é apresentada uma abordagem sucinta da história da Cartografia, realçando-se as principais contribuições para o seu desenvolvimento.

No segundo capítulo, são introduzidos alguns conceitos fundamentais para se compreender a noção de superfície: parametrização; superfície regular e aplicação suave; espaço tangente e derivada de uma aplicação; superfície orientável.

Uma explanação teórica das projectões cartográficas é efectuada no terceiro capítulo.

Existe uma grande diversidade de projectões: umas conhecidas pela sua designação tradicional, que utiliza o nome do seu criador e que deve ser a usada quando é universalmente reconhecida (como a projectão de Mercator); outras, identificadas pela sua classe e propriedades, as quais se tornam na designação a utilizar sempre que não existam designações universalmente reconhecidas. Um sistema de classificação das projectões pode ser efectuado tendo em consideração a superfície de projectão

adoptada. Assim, uma projecção é dita plana ou azimutal, quando a superfície de projecção é um plano; cilíndrica ou cónica, quando a superfície de projecção é um cilindro ou cone, respectivamente.

Este trabalho cinge-se ao estudo da projecção estereográfica (projecção azimutal que já era conhecida por Hiparco de Nicea (190-120 a.C.) e das principais projecções cilíndricas equatoriais, eixo do cilindro paralelo ao eixo da Terra.

No capítulo 4, é abordado o instrumento que permite calcular: o comprimento de uma curva numa superfície S a partir da curva correspondente no mapa; o ângulo entre duas direcções em S a partir das direcções correspondentes no mapa; a área de uma região limitada de S a partir da região no mapa. Para exemplificar, são apresentados alguns exemplos concretos. Este capítulo contempla, ainda, o estudo das condições necessárias para que uma aplicação entre duas superfícies arbitrárias seja uma isometria, conforme e equiareal - estudo que permitirá verificar se numa projecção as relações de distância entre os vários locais da Terra são conservados, assim como os ângulos e as áreas.

O capítulo 5 inicia-se com um estudo da Aplicação de Gauss. Posteriormente, é apresentada uma forma de medir a *curvatura* de uma superfície. Este capítulo termina com a demonstração do teorema *Egregium de Gauss*, teorema que permite afirmar que qualquer projecção envolve deformações incontornáveis.

Partindo-se do facto de que não existe uma projecção perfeita e de que, por princípio, se ambiciona sempre uma projecção com o mínimo de deformações possível, no capítulo seguinte apresenta-se um estudo das principais propriedades e deformações das projecções abordadas no terceiro capítulo.

O mapa representa um recurso didáctico imprescindível, essencialmente, no âmbito da leccionação dos conteúdos das disciplinas de Geografia e História. Contudo, a Matemática, enquanto instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica, não pode ser dissociada da análise deste recurso. Com efeito, no último capítulo, é apresentada uma actividade, passível de ser desenvolvida com alunos do ensino secundário, a qual permite estabelecer conexões com vários temas da Matemática, ao mesmo tempo que possibilita uma interdisciplinaridade com as

Ciências Humanas. Com esta actividade, os alunos têm, ainda, a oportunidade de se consciencializarem acerca da importância da Matemática como criadora de modelos que permitem interpretar e compreender o universo.

Capítulo 1

Um Breve Olhar sobre a Evolução Cartográfica

A Associação Cartográfica Internacional (ACI) estabeleceu, em 1966, o seguinte conceito sobre a cartografia, hoje aceite pela comunidade científica, o qual foi ratificado no mesmo ano pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO):

Conjunto dos estudos e operações científicas, técnicas e artísticas que intervêm a partir dos resultados das observações directas ou da exploração de documentação variada, com vista à elaboração e obtenção de mapas, plantas e outros modos de expressão, assim como da sua utilização. (Adaptado por DIAS, M. Helena, 2007, p. 27).

As raízes históricas da Cartografia (do grego chartis = mapa e graphein = escrita) chegaram até nós através de registos deixados pelas grandes civilizações antigas, principalmente pelos seus navegantes e exploradores.

O mapa mais antigo de que se tem conhecimento foi descoberto nas escavações das ruínas da cidade de Ga-Sur cidade que ficava aproximadamente a 300 km da Babilónia, actual Iraque. Este mapa data de 2500 a.C., encontrando-se, actualmente, na Universidade de Harvard. Trata-se de uma placa de barro, em que está representado o vale de um rio, apontado pelos estudiosos como o Eufrates. A nitidez de

seus caracteres cuneiformes não dá ideia da sua vetusta idade.



Figura 1.1: Mapa de Ga-Sur. [33]

A base do actual sistema cartográfico é atribuída aos gregos, que fortemente influenciados pelas descobertas dos babilónios, atingiram na Antiguidade um grau de conhecimento inigualável, o qual permanece até ao início do século XVI. Admitiram a esfericidade da Terra, introduziram os primeiros conceitos de latitude, longitude, pólos, Equador e trópicos, bem como a idealização dos primeiros sistemas de projecção.

Grandes nomes merecem destaque nesta época: Anaximandro de Mileto (610-547 a.C.), que elaborara um mapa-múndi do mundo então conhecido; Eratóstenes (285-194 a.C.), que tendo dirigido a célebre biblioteca de Alexandria, comprovou a esfericidade da Terra e determinara com impressionante precisão o perímetro de um meridiano terrestre; Hiparco de Nicea (190-120 a.C.), considerado o maior astrónomo da Antiguidade e uma figura de transição entre a astronomia babilónica e a obra de Ptolomeu. Embora a obra escrita por Hiparco esteja perdida, parte do seu trabalho é conhecido na obra *Comentário à Composição Matemática de Ptolomeu* de Teão de Alexandria (século IV d.C.). Hiparco fez descobertas fundamentais para a astronomia: a ele se atribui o método de determinação da latitude e da longitude por processos astronómicos; no campo da cartografia, criou um método de projecção estereográfica. Todo este conhecimento da Grécia Antiga se concentra particularmente nos trabalhos do astrónomo grego Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C.). O mapa de Ptolomeu, construído a partir de informações de navegadores, mercado-

res e exércitos que percorriam grandes distâncias, bem como a partir das posições geográficas de algumas localidades já conhecidas da época (como as cidades de Alexandria e Siena - hoje chamada Assuã), serviu de inspiração a vários cartógrafos do século XV e XVI.



Figura 1.2: Mapa de Ptolomeu. [34]

Ptolomeu marca o culminar da cartografia na Antiguidade Clássica. A partir desta época, a Cartografia, assim como outras ciências, passa por um longo período de estagnação no mundo ocidental. Ao longo da Idade Média, marcada por um fervoroso teocentrismo no ocidente, não se aceitavam novos avanços e descobertas científicas que não fossem consubstanciados na cultura judaico-cristã. Por isso, os mapas produzidos nessa época eram rudimentares; os mais comuns foram os conhecidos *Orbis Terrarum* ou mapas *T no O*. Nestes mapas, a Terra é representada como um disco circundado pelo “Mar Oceano” (o “O”); os três continentes conhecidos distribuem-se em torno da cidade santa de Jerusalém, referência claramente cristã.

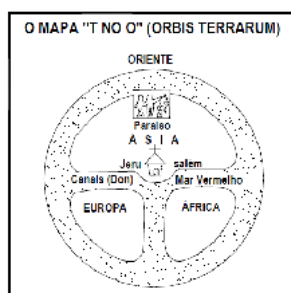


Figura 1.3: Mapa *T no O*. [29]

É de salientar, contudo, que alguns mapas medievais chegaram até à contemporaneidade com uma riqueza de detalhes deslumbrantes. Um exemplo é o mapa de Hereford, que foi produzido no início do século XIII sobre a pele de um vitelo e pintado com tinta natural. Este mapa encontra-se na catedral de Hereford, Inglaterra.



Figura 1.4: Mapa de Hereford. [37]

A grande obra de Ptolomeu, que fora proibida durante a Idade Média no mundo ocidental, sobreviveu na cultura árabe, mais aberta a novos conhecimentos científicos. Devemos à civilização islâmica a preservação dos escritos clássicos e a sua transmissão posterior ao Ocidente renascentista. Convém, no entanto, salientar que esta civilização impulsionou a cultura e o saber e que esse papel não se limitou, de forma alguma, a uma mera transmissão de conhecimentos anteriores. Na verdade, durante a Idade Média, a civilização islâmica desenvolveu uma intensa actividade científica e foi inovadora em diversas áreas, de um modo especial na Matemática. Uma inovação dos matemáticos árabes foi a introdução e utilização das funções trigonométricas *tangente*, *co-tangente*, *secante* e *co-secante*, que aparecem plenamente estudadas nos trabalhos de al-Biruni (973-1055) no seu *Tratado Exhaustivo das Sombras*. Este matemático e os seus seguidores conseguiram igualmente construir tabelas trigonométricas de grande precisão, o que tornou estas funções num instrumento precioso para a Topografia e a Astronomia. Alguma actividade dos cientistas islâmicos também estava relacionada com temas religiosos: o calendário lunar; a determinação da direcção de Meca a partir de qualquer lugar, a *qibla*, necessária para as orações, etc. A atenção dos cientistas na determinação da *qibla* explica, em larga medida,

o interesse dos matemáticos pela trigonometria esférica (que se veio a tornar num instrumento crucial da navegação) e pela determinação das coordenadas geográficas de inúmeros locais.

As contribuições da ciência árabe deixaram marcas indeléveis, contudo, grandes avanços científicos no campo da Cartografia só reapareceram no final do século XV-início do século XVI, período dos descobrimentos. Nas grandes viagens marítimas de exploração e circum-navegação, os navegadores sentiam a necessidade de mapas mais precisos e informativos. As experimentações tipográficas de Johann Gutemberg, da primeira metade do século XV, facilitaram, indubitavelmente, a produção e difusão dos mapas, o que também contribuiu para o avanço cartográfico. Surge, nesta época, o notável cartógrafo flamengo Gerardus Mercator (1512-1594) que publicou um mapa-múndi em 1569, que designou por *Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigatium Emendate*.

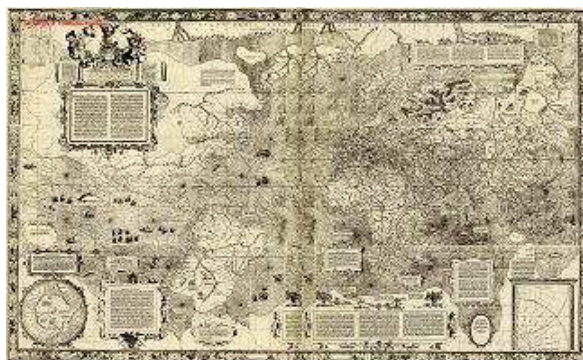


Figura 1.5: *Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigatium Emendate* (1569). [35]

Esta famosa projecção, como se pode depreender da sua denominação latina, foi concebida para dar resposta às necessidades práticas (*ad usum*) da navegação. Contudo, as limitações inerentes aos métodos de navegação então praticados impediam o seu uso efectivo. Só em meados do século XVIII foi a projecção de Mercator definitivamente adoptada pelos navegadores. O principal defeito da projecção de Mercator interliga-se com o facto de que as regiões situadas em altas latitudes surgem representadas com consideráveis deformações. Um exemplo frequentemente citado é o da Gronelândia que, no mapa, aparece maior que a América do Sul quando, na

realidade, a América do Sul é cerca de oito vezes maior do que a Gronelândia.



Figura 1.6: Mapa de Mercator. [41]

Cientes das imprecisões da projecção de Mercator, os cartógrafos sempre pensaram em alternativas para a representação do mapa-múndi, como, por exemplo, a projecção do belga Van der Grinten, de 1904, que foi a preferida nas publicações da *National Geographic Society* entre 1922 e 1988.

Em 1973, o historiador alemão Arno Peters apresentou uma projecção que ele mesmo designou por “mapa para um mundo mais solidário”. A projecção de Peters é conhecida por *terceiro - mundista*, por dar um maior realce às nações que historicamente compõem a parte mais pobre do mundo. Tanto é que a Projecção de Peters foi utilizada pelo Fundo das Nações Unidas para a Infância (UNICEF) como uma tentativa de sensibilizar os países mais desenvolvidos para a pobreza de outros países. A maior diferença da projecção de Peters para com a representação de Mercator é o achatamento do continente europeu e o alongamento do continente africano. Todavia, o que pareceu ser uma acção cartográfica por uma “nobre causa”, tornou-se no ponto de partida para acesos debates entre os cartógrafos. Vários cartógrafos condenaram esta projecção, alegando várias “irregularidades cartográficas”.

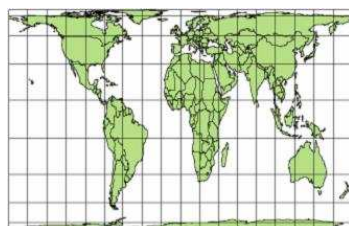


Figura 1.7: Projecção de Peters. [36]

Actualmente, existe uma grande variedade de projecções. No entanto, apesar do avanço tecnológico facilitar não só o acesso à informação geográfica como também à respectiva manipulação, de uma forma que seria inimaginável há algumas décadas, toda a projecção tem que tolerar distorções inevitáveis, como vamos verificar neste trabalho.

Capítulo 2

Superfícies

2.1 Definições e Exemplos

O que é uma superfície?

É um subconjunto de \mathbb{R}^3 que “se assemelha” a uma parte de \mathbb{R}^2 “numa vizinhança” de qualquer ponto, tal como a superfície da Terra, embora esférica, parece plana a um observador nela colocado que consegue ver somente até à linha do horizonte.[18]

Definição 1. Um subconjunto $S \neq \emptyset$ de \mathbb{R}^3 é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existirem um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, um aberto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ contendo p e uma bijecção $\sigma : U \longrightarrow W = V \cap S$, $(u, v) \longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com as seguintes propriedades:

i) σ é suave;

ii) σ é um homeomorfismo;

iii) para qualquer $q \in U$ a matriz jacobiana

$$J_{\sigma}(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix}$$

tem característica 2. Ou seja, para cada $q \in U$, os vectores

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right) \\ \bullet \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right) \end{aligned}$$

são linearmente independentes.

Ou ainda, para cada $q \in U$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \neq (0, 0, 0).$$

O que significa que um dos determinantes

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial (x, z)}{\partial (u, v)}, \quad \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)}$$

é diferente de zero.

Uma aplicação σ com estas três propriedades tem a designação de **parametrização** (ou sistema de coordenadas) de S numa vizinhança de p . Ao aberto U chamamos mapa da região $\sigma(U) \subset S$.

Se $\sigma(U) = S$ dizemos que a parametrização é global.

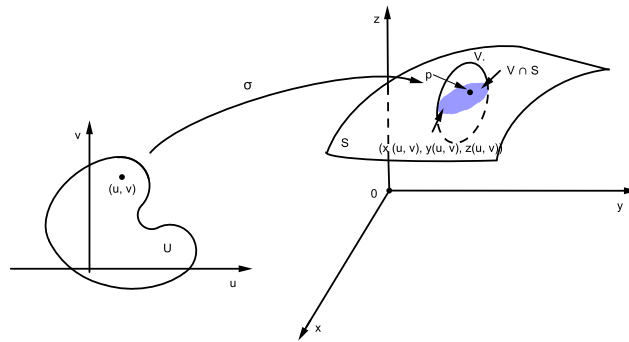
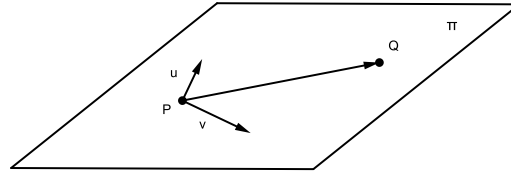


Figura 2.1: Aplicação σ .

Exemplo

Qualquer plano π em \mathbb{R}^3 é uma superfície com uma parametrização global. De facto, seja P um ponto do plano e $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ dois vectores ortogonais do plano.



Para cada ponto Q do plano, o vector \overrightarrow{PQ} é uma combinação linear de u e v .

Ou seja,

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = x u + y v, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \pi \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longrightarrow P + x u + y v \end{aligned}$$

é uma parametrização global do plano.

A aplicação ψ é uma parametrização do plano, pois ψ é suave e para $Q \in \pi$, tem-se

$$Q - P = x u + y v \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \overrightarrow{PQ}, u \rangle &= \langle x u + y v, u \rangle \\ &= x \langle u, u \rangle + y \langle v, u \rangle \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \overrightarrow{PQ}, v \rangle &= \langle x u + y v, v \rangle \\ &= x \langle u, v \rangle + y \langle v, v \rangle \\ &= y \end{aligned}$$

Assim, a inversa de ψ é a aplicação contínua dada por

$$\psi^{-1}(Q) = \left(\langle \overrightarrow{PQ}, u \rangle, \langle \overrightarrow{PQ}, v \rangle \right)$$

ou seja, ψ é um homeomorfismo.

Por outro lado, a matriz jacobiana

$$J_{\psi}(u, v) = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix}$$

tem característica 2, uma vez que os vectores u e v são linearmente independentes.

Logo, pode-se afirmar que a aplicação ψ é uma parametrização (global) do plano.

Vejamos agora dois exemplos genéricos: o gráfico de uma aplicação e a superfície de nível.

Proposição 1. *Sejam U um aberto de \mathbb{R}^2 e $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então o gráfico da aplicação f*

$$G_f = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$$

é uma superfície.

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} \sigma : U &\longrightarrow G_f \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

Vejamos que σ é uma parametrização (global) de G_f .

Da definição de σ resulta que σ é suave e $\sigma(U) = G_f = G_f \cap \mathbb{R}^3$.

A injectividade de σ é óbvia.

A aplicação

$$\sigma^{-1} : G_f \longrightarrow U$$

é a restrição a G_f da projecção $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y, z) \longrightarrow (x, y)$, logo é uma aplicação contínua. Pelo que, σ é um homeomorfismo.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) &= \left(1, 0, \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)\right) \wedge \left(0, 1, \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)\right) \\ &= \left(-\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), -\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), 1\right) \neq (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que $G_f = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$ é uma superfície. \square

De modo análogo, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x, z)\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = f(y, z)\}$ também são superfícies.

Definição 2. Um número real a diz-se um **valor regular** de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suave se, para cada $p \in f^{-1}(a)$, o gradiente

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0).$$

As superfícies são frequentemente dadas como superfícies de nível $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = a\}$, definidas através de equações da forma $f(x, y, z) = a$ onde $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave. Contudo, nem sempre tais equações definem uma superfície. O teorema seguinte dá as condições sob as quais é possível construir um mapa para uma superfície de nível.

Teorema 1. Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $S = f^{-1}(a)$ é uma superfície.

Demonstração. Seja

$$p = (p_1, p_2, p_3) \in S = f^{-1}(a) \subseteq U.$$

Por hipótese,

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Ou seja, uma das derivadas parciais não se anula. Suponhamos então que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ (a prova é similar nos outros dois casos).

Pelo Teorema da Função Implícita, existem V , aberto de \mathbb{R}^2 , W , aberto de \mathbb{R} , e $g : V \longrightarrow W$ de classe C^∞ , tais que $(p_1, p_2) \in V$, $p_3 \in W$, $g(p_1, p_2) = p_3$ e $f^{-1}(a) \cap (V \times W) = G_g$.

Assim, pela Proposição 2, podemos concluir que $S = f^{-1}(a)$ é uma superfície. \square

Exemplos

- 1) A esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, com $r > 0$, é uma superfície.

Verificação

Consideremos a função

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Sendo f uma função polinomial, é claramente uma função C^∞ .

Temos que

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} = f^{-1}(\{r^2\})$$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z), \text{ donde}$$

$$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ se e só se } x = y = z = 0.$$

Portanto, o gradiente de f anula-se no ponto $(0, 0, 0)$. Como este ponto não pertence a $f^{-1}(\{r^2\})$, r^2 é um valor regular de f e S^2 é uma superfície.

- 2) O cilindro circular vertical $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$, com $r > 0$, é uma superfície.

Verificação

Seja

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Sendo g uma função polinomial é de classe C^∞ .

Temos que

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\} = g^{-1}(\{r^2\})$$

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 0), \text{ donde}$$

$$\nabla g(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ se e só se } x = y = 0.$$

Como $g(0, 0, 0) = 0$, o único valor crítico de g é 0.

Assim, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ é uma superfície.

De seguida apresentamos alguns resultados que serão necessários para a fundamentação matemática das projecções cartográficas. O estudo apresentado baseia-se essencialmente nas referências bibliográficas [1], [2] e [14].

2.2 Alguns Resultados Técnicos

Teorema 2. *Qualquer ponto p de uma superfície S possui (em S) uma vizinhança aberta W de uma das seguintes formas:*

$$W = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in A\}$$

$$W = \{(x, h(x, z), z) : (x, z) \in A\}$$

$$W = \{(h(y, z), y, z) : (y, z) \in A\}$$

sendo, em cada caso, A um aberto de \mathbb{R}^2 e $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^∞ .

Demonstração. Seja $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização de S tal que $p \in \sigma(U)$ e seja $q = \sigma^{-1}(p)$.

Consideremos $\sigma : U \rightarrow S$ definida por $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Pela terceira condição da Definição 1, $J_\sigma(q)$ tem característica 2, ou seja,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \neq (0, 0, 0).$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \neq 0.$$

Seja

$$\begin{aligned} f = \pi \circ \sigma : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

com $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

f é de classe C^∞ e $\det(J_f(q)) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança aberta $\tilde{U} \subset U$ de q tal que f é um difeomorfismo de \tilde{U} sobre uma vizinhança aberta A de $f(q)$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} h : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z(f^{-1}(x, y)) \end{aligned}$$

h é de classe C^∞ .

Seja $W = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in A\}$.

Como $(x, y) \in A \Leftrightarrow (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ com $(u, v) \in \tilde{U}$.

Temos

$$\begin{aligned} W &= \left\{ (x(u, v), y(u, v), h(x(u, v), y(u, v))) : (u, v) \in \tilde{U} \right\} \\ &= \left\{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in \tilde{U} \right\} \\ &= \sigma(\tilde{U}). \end{aligned}$$

Assim,

- $p \in W$, pois $p = \sigma(q)$ e $q \in \tilde{U}$;
- W é um aberto em S , pois:

$\sigma(\tilde{U})$ é um aberto de $\sigma(U)$ porque $\sigma : U \longrightarrow \sigma(U)$ é um homeomorfismo. Como $\sigma(U)$ é um aberto em S , logo podemos dizer que $W = \sigma(\tilde{U})$ também é um aberto em S . Em conclusão, W é uma vizinhança aberta de p .

□

De modo análogo, se demonstram os outros dois casos, fazendo $y = h(x, z)$ e $x = h(y, z)$, respectivamente.

Nota: Uma consequência imediata do teorema anterior: localmente uma superfície é o gráfico de uma função suave de duas variáveis.

Proposição 2. *Sejam S uma superfície, $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $\sigma : U \rightarrow S$ uma aplicação de classe C^∞ . Se σ é injectiva e se $J_\sigma(u, v)$ tem característica 2, $\forall (u, v) \in U$, então $\sigma : U \rightarrow \sigma(U)$ é uma parametrização de S .*

Demonstração. Pela Definição 1, apenas é necessário verificar a continuidade da inversa $\sigma^{-1} : \sigma(U) \rightarrow U$.

Seja $p \in \sigma(U)$ e $q = \sigma^{-1}(p)$.

Pelo teorema anterior, existe uma vizinhança aberta $W \subset S$ de p tal que W é o gráfico de uma função suave de duas variáveis, suponhamos de (x, y) .

Assim, $W = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in A\}$, onde A é um aberto de \mathbb{R}^2 e $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^∞ .

Seja $N = \sigma^{-1}(W) \subset U$. A restrição de σ a N escreve-se:

$$\sigma(u, v) = \left(x(u, v), y(u, v), h(x(u, v), y(u, v)) \right).$$

Isto implica que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial y}{\partial u} \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v} \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial y}{\partial v} \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y} \right).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x} \right) \wedge \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0)$, temos que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$.

Seja $f = \pi \circ \sigma : N \rightarrow A$, onde $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Como f é de classe C^∞ e $\det(J_f(q)) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança aberta $\tilde{U} \subset N$, de q , tal que $f : \tilde{U} \rightarrow f(\tilde{U})$ é um difeomorfismo de \tilde{U} sobre uma vizinhança de $f(q)$.

Portanto, sabemos que $\sigma(\tilde{U}) = \pi^{-1}(f(\tilde{U})) \cap W$ é um aberto em S e que σ^{-1} é uma composição de funções contínuas, pois para todo $(x, y, z) \in W$

$$\sigma^{-1} = f^{-1} \circ \pi.$$

Assim, σ^{-1} é uma aplicação contínua em p .

Como p é um ponto arbitrário, σ^{-1} é contínua em $\sigma(\tilde{U})$.

□

Proposição 3. *Sejam U um aberto de \mathbb{R}^2 , V um aberto de \mathbb{R}^3 e as aplicações $\varphi : U \rightarrow V$ e $\psi : V \rightarrow U$ de classe C^∞ , tais que $\psi \circ \varphi = id$. Então $S = \varphi(U)$ é uma superfície e φ uma parametrização de S .*

Demonstração. Seja $p \in S = \varphi(U)$.

Consideremos a aplicação sobrejectiva:

$$\begin{aligned} \sigma : U &\longrightarrow \varphi(U) \cap V = \varphi(U) = S \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) \end{aligned}$$

Temos que

- σ é de classe C^∞ ;
- σ verifica $\psi \circ \sigma = id$.

Logo, σ é injectiva e bijectiva de inversa $\psi|_S$.

Como

- ψ é de classe C^∞ , logo contínua e temos que σ é um homeomorfismo.
- $\psi \circ \sigma = id$, então $J_\psi(\sigma(u, v)) \cdot J_\sigma(u, v) = id$.

Pelo que a característica de $J_\sigma(u, v)$ é 2.

Assim, podemos concluir que S é uma superfície e φ é uma parametrização de S .

□

Proposição 4. *Sejam S uma superfície, $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\alpha : A \rightarrow S$ uma aplicação suave e $\Phi : U \rightarrow S$ uma parametrização de S tal que $\alpha(A) \subseteq \Phi(U)$.*

Então $\Phi^{-1} \circ \alpha : A \rightarrow U$ é suave.

Demonstração. Sejam $r \in A$ e $q = \Phi^{-1} \circ \alpha(r)$.

Como

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

é uma parametrização de S , podemos supor que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$.

Consideremos a aplicação suave:

$$\begin{aligned} F : U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, t) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U \quad \text{e} \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{A restrição } F|_{U \times \{0\}} = \Phi \quad \text{e} \quad \det(J_F(q)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{R}^3$ contendo $\Phi(q) = \alpha(r)$ tal que F^{-1} existe e é suave em V .

Deste modo, $F^{-1} \circ \alpha|_{\alpha^{-1}(V)}$ é suave (composição de aplicações suaves).

Mas, $F^{-1} \circ \alpha|_{\alpha^{-1}(V)} = \Phi^{-1} \circ \alpha|_{\alpha^{-1}(V)}$.

Como $\alpha^{-1}(V)$ é um aberto que contém r , podemos concluir que $\Phi^{-1} \circ \alpha$ é suave numa vizinhança de r .

Como r é um ponto arbitrário, logo $\Phi^{-1} \circ \alpha$ é suave.

□

2.3 Parametrização da Esfera e do Cilindro

Parametrização da Esfera

Uma parametrização é dada pelas coordenadas geográficas, latitude θ e longitude φ .

Consideremos uma esfera de centro $O = (0, 0, 0)$ e raio r , $N = (0, 0, r)$.

Sejam P um ponto da esfera, P' a sua projecção ortogonal sobre o plano equatorial ($z = 0$); A a projecção ortogonal de P' sobre o eixo Ox e B sobre o eixo Oy . Sejam, ainda, $w = \overline{OP'}$, $x = \overline{OA}$, $y = \overline{OB}$; φ a longitude do ponto P , isto é, a amplitude do ângulo orientado definido pelo semi-eixo positivo Ox e $\overrightarrow{OP'}$, θ a latitude do ponto P , isto é, a amplitude do ângulo orientado $\angle(\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP})$, sendo a orientação do plano OPP' dada pela base $(\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{ON})$.

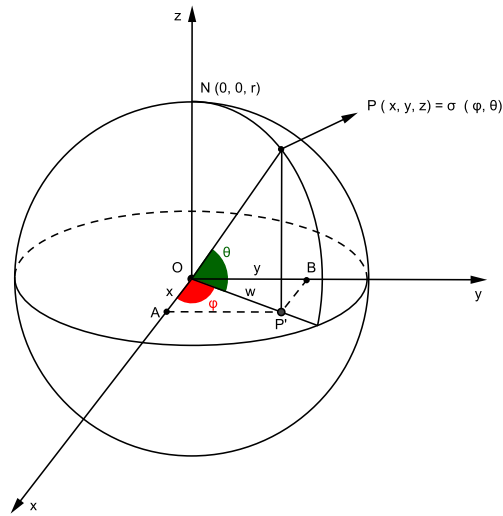


Figura 2.2: Coordenadas geográficas de um ponto no globo terrestre.

Tem-se que

$$\begin{array}{l|l} \cos \varphi = \frac{x}{w} & \cos \theta = \frac{w}{r} \\ \Leftrightarrow x = w \times \cos \varphi & \Leftrightarrow w = r \times \cos \theta \end{array}$$

logo

$$x = r \cos \theta \cos \varphi.$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \frac{y}{w} \\ \Leftrightarrow y &= w \times \operatorname{sen} \varphi \\ \Leftrightarrow y &= r \times \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \right| \begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{z}{r} \\ \Leftrightarrow z &= r \times \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Assim, consideramos a aplicação σ dada por

$$\sigma(\varphi, \theta) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, r \operatorname{sen} \theta).$$

Para cobrir toda a esfera é suficiente considerar

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

No entanto, neste domínio a aplicação σ não é injectiva e, além disso, este domínio não é um aberto. Um aberto maximal de \mathbb{R}^2 consistente com as desigualdades acima mencionadas e que garante a injectividade de σ é:

$$U = \left\{ (\varphi, \theta) : -\pi < \varphi < \pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Assim, vamos considerar a aplicação injectiva

$$\begin{aligned} \sigma :]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\longrightarrow S^2 \\ (\varphi, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, r \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

A imagem de σ não é toda a esfera, pois exclui um meridiano.

Ou seja, a imagem de σ é $S_*^2 = S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 : x \leq 0 \wedge y = 0\}$.

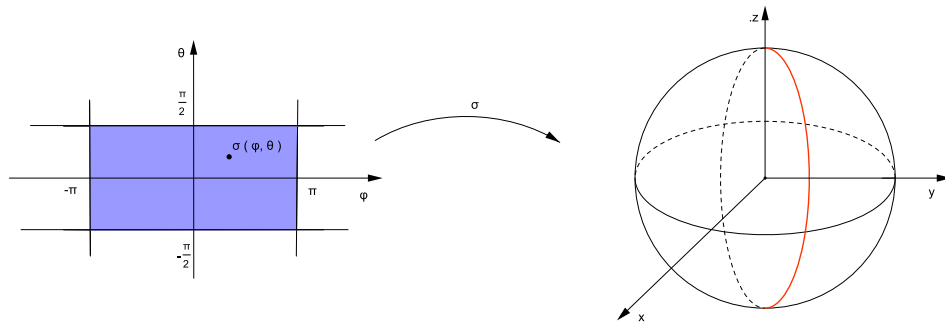


Figura 2.3: Interpretação geométrica da aplicação σ .

Como

- $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = (-r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta \cos \varphi, 0)$
- $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$

logo

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = (r^2 \cos^2 \theta \cos \varphi, r^2 \cos^2 \theta \sin \varphi, r^2 \sin \theta \cos \theta)$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \right\| &= \sqrt{r^4 \cos^4 \theta \cos^2 \varphi + r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \varphi + r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^4 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= r^2 |\cos \theta| \neq 0, \text{ pois } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \end{aligned}$$

O que significa que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \neq (0, 0, 0).$$

Assim, pela Proposição 2, podemos concluir que a aplicação σ é uma parametrização da superfície esférica que cobre toda esta superfície excepto um meridiano.

Ao longo deste trabalho, vamos muitas vezes trabalhar com S_*^2 em vez de S^2 .

Parametrização do Cilindro

Vamos considerar o cilindro circular vertical obtido através do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

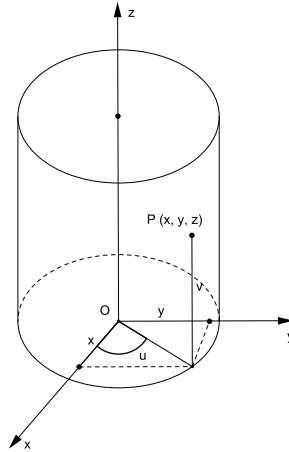


Figura 2.4: Cilindro circular vertical.

Tem-se que

$$\begin{array}{l|l} \cos u = \frac{x}{1} & \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{y}{1} \\ \Leftrightarrow x = \cos u & \Leftrightarrow y = \sin u \end{array}$$

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

$$\text{onde } U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < u < \pi, -\infty < v < +\infty\}$$

Φ é injectiva e claramente de classe C^∞ .

Por outro lado,

- $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = (0, 0, 1)$

logo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \wedge (0, 0, 1) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$$

e

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\| = \sqrt{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u} = 1.$$

O que significa que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0).$$

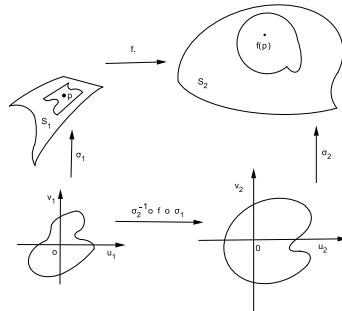
Assim, pela Proposição 2, a aplicação Φ é uma parametrização do cilindro.

Tal como para a parametrização da esfera, a aplicação Φ não cobre todo cilindro, exclui um meridiano.

2.4 Aplicações entre Superfícies e Difeomorfismos

Definição 3. *Sejam S_1 e S_2 superfícies e W um aberto de S_1 . Uma aplicação $f : W \subseteq S_1 \longrightarrow S_2$ diz-se suave se, para quaisquer parametrizações $\sigma_1 : U_1 \longrightarrow W_1 = \sigma_1(U_1)$ de S_1 e $\sigma_2 : U_2 \longrightarrow W_2 = \sigma_2(U_2)$ de S_2 tais que $f(W_1) \subset W_2$, $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é suave.*

Proposição 5. *Uma aplicação $f : W \subseteq S_1 \longrightarrow S_2$ é suave se e só se, para cada $p \in W$, existem parametrizações $\sigma_1 : U_1 \longrightarrow W_1 = \sigma_1(U_1)$ e $\sigma_2 : U_2 \longrightarrow W_2 = \sigma_2(U_2)$ de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $p \in W_1$, $f(p) \in W_2$, $f(W_1) \subset W_2$ e $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.*



Demonstração. \Rightarrow Imediata.

\Leftarrow

Sejam $\tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{W}_1$ e $\tilde{\sigma}_2 : \tilde{U}_2 \rightarrow \tilde{W}_2$ parametrizações de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $f(\tilde{W}_1) \subset \tilde{W}_2$.

Pretende-se demonstrar que

$$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é suave.

Seja $q \in \tilde{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Basta verificar que $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1$ é suave numa vizinhança de q .

Seja $p = \tilde{\sigma}_1(q)$. Então, por hipótese, existem parametrizações $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1$ e $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2$ em p e $f(p)$, respectivamente, tais que $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.

Considere-se a restrição de $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1$ a $\tilde{U}_1 \cap U_1$.

$$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1 = (\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2) \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1)$$

Pela Proposição 4, $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2$ e $\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1$ são aplicações suaves.

Logo, $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1$ é suave, pois trata-se de uma composição de aplicações suaves.

□

Definição 4. Uma aplicação entre superfícies, $f : S_1 \rightarrow S_2$, suave, bijectiva, cuja inversa ainda é suave, chama-se um **difeomorfismo**.

Proposição 6. Sejam W um aberto de \mathbb{R}^3 , $\tilde{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação suave e $S_1 \subset W$ e $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares. Se $\tilde{f}(S_1) \subset S_2$ então

$$\tilde{f}|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$$

é uma aplicação suave.

Demonstração. Seja $f = \tilde{f}|_{S_1}$.

Sejam $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1$ e $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2$ parametrizações de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $f(W_1) \subset W_2$.

Vejamos que $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é uma aplicação suave.

$f \circ \sigma_1 = \tilde{f} \circ \sigma_1 : U_1 \longrightarrow S_2$ é uma aplicação suave definida num aberto U_1 de \mathbb{R}^2 ; $\sigma_2 : U_2 \longrightarrow S_2$ uma parametrização de S_2 e $f \circ \sigma_1 (U_1) \subseteq S_2$.

Logo, pela Proposição 4, $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.

□

2.5 Plano Tangente e Orientação de uma Superfície

Definição 5. Um vector tangente a S num ponto $p \in S$ é um vector que é tangente a alguma curva em S que passa por p . Isto é, v é tangente a S em p se existir uma curva¹ γ em S tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$, para algum t_0 do domínio de γ .

Proposição 7. Seja $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície S que contém um ponto p de S .

O conjunto dos vectores tangentes a S em $p = \sigma(q)$ coincide com o subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 gerado pelos vectores

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q).$$

Demonstração. Seja v um vector tangente a S em p e seja $\sigma : U \longrightarrow W \subseteq S$ uma parametrização de S contendo o ponto p . Então, existe uma curva $\gamma :]a, b[\longrightarrow W$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$.

Consideremos a composição

$$]a, b[\xrightarrow{\gamma} W \xrightarrow{\sigma^{-1}} U \xrightarrow{\sigma} W.$$

Pela Proposição 4, $\sigma^{-1} \circ \gamma$ é suave.

Designando $\sigma^{-1} \circ \gamma$ por $\tilde{\gamma}$, temos

$$J_\gamma(t_0) = J_\sigma(q) \cdot J_{\tilde{\gamma}}(t_0)$$

¹Chamamos curva em $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a uma aplicação suave $\gamma :]a, b[\longrightarrow A$. Dizemos que a curva é regular se $\forall t \in]a, b[\quad \gamma'(t) \neq \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma'_1(t_0) \\ \gamma'_2(t_0) \\ \gamma'_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(q) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}'_1(t_0) \\ \tilde{\gamma}'_2(t_0) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$v = \tilde{\gamma}'_1(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + \tilde{\gamma}'_2(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q).$$

Reciprocamente, qualquer vector do subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 gerado pelos vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(q)$ é da forma

$$v = c \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + d \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Consideremos a curva

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto q + t(c, d). \end{aligned}$$

Trata-se de uma função de classe C^∞ . Como é contínua em $t = 0$ e $\bar{\gamma}(0) = q \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\bar{\gamma}([-\epsilon, \epsilon]) \subseteq U$. Assim, se considerarmos a restrição de $\bar{\gamma}$ ao intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$, podemos efectuar a composição com a parametrização σ de S e obter uma curva $\gamma = \sigma \circ \bar{\gamma}$ em S que passa por p (pois $\gamma(0) = p$):

$$]-\epsilon, \epsilon[\xrightarrow{\bar{\gamma}} U \xrightarrow{\sigma} W \subseteq S.$$

Como $\gamma(0) = \sigma(\bar{\gamma}(0)) = \sigma(q) = p$, $\bar{\gamma}'_1(0) = c$ e $\bar{\gamma}'_2(0) = d$, temos

$$J_\gamma(0) = J_\sigma(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(0)$$

$$\Leftrightarrow \gamma'(0) = c \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + d \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q)$$

$$\Leftrightarrow \gamma'(0) = v$$

ou seja, v é tangente a S em p .

□

A este espaço vectorial de \mathbb{R}^3 , formado pelos vectores tangentes a S em p , chama-se **espaço tangente** de S em p . Como $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(q)$ são linearmente independentes, o espaço tangente a S em p , habitualmente designado por $T_p S$, tem dimensão 2. Temos, assim, em p um plano $p + T_p S$, o chamado **plano tangente** a S em p .

Definição 6. *Sejam S_1 e S_2 superfícies e $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação suave. Para cada $p \in S_1$, a correspondência $\gamma'(t_0) \rightarrow (f \circ \gamma)'(t_0)$ define uma aplicação*

$$df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

A aplicação df_p é designada a **derivada** (ou *diferencial*) de f no ponto p .

Teorema 3 (Teorema da Derivação da Função Composta). *Sejam S_1, S_2, S_3 superfícies regulares, $p \in S_1$, $f : S_2 \rightarrow S_3$ e $g : S_1 \rightarrow S_2$ aplicações suaves. Então $f \circ g$ é uma aplicação suave e*

$$d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p = df_{g(p)}(dg_p).$$

Teorema 4. *Sejam $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação suave entre superfícies, $p \in S_1$, $\sigma : U \rightarrow S_1$ uma parametrização tal que $p \in \sigma(U)$ e $q = \sigma^{-1}(p)$. Então, $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ é a aplicação linear definida por:*

$$\begin{cases} df_p\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q)\right) = \frac{\partial(f \circ \sigma)}{\partial u}(q) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(q) \\ df_p\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(q)\right) = \frac{\partial(f \circ \sigma)}{\partial v}(q) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(q). \end{cases}$$

onde $\bar{f} = f \circ \sigma$.

Demonstração. Sejam $\beta :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \sigma(U)$ uma curva tal que $\beta(0) = p$ e $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U$ tal que $\beta(t) = \sigma(\alpha(t))$, sendo $\alpha(t) = (u(t), v(t))$.

$$\text{Logo, } \alpha(0) = (u(0), v(0)) = q.$$

Deste modo,

$$\beta(t) = \sigma(u(t), v(t))$$

$$\beta'(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u(t), v(t)) u'(t) + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u(t), v(t)) v'(t)$$

$$\beta'(0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u(0), v(0)) u'(0) + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u(0), v(0)) v'(0)$$

$$\beta'(0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) u'(0) + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) v'(0)$$

ou seja,

$$\beta'(0) = (u'(0), v'(0)) \text{ na base } \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\} \text{ de } T_p S_1.$$

Seja $\bar{f}(u, v) = f(\sigma(u, v))$

então

$$f(\beta(t)) = \bar{f}(u(t), v(t)).$$

Como as funções são iguais

$$\frac{d}{dt}[f(\beta(t))] = \frac{d}{dt}[\bar{f}(u(t), v(t))].$$

Pelo Teorema da Função Composta

$$\frac{d}{dt}[f(\beta(t))] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(u(t), v(t)) u'(t) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(u(t), v(t)) v'(t).$$

Por definição de df_p

$$\begin{aligned} df_{\beta(0)}(\beta'(0)) &= \frac{d}{dt}[f(\beta(0))] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(u(0), v(0)) u'(0) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(u(0), v(0)) v'(0) \\ &\Leftrightarrow df_p\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) u'(0) + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) v'(0)\right) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(q) u'(0) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(q) v'(0). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Em particular

- para $\alpha(t) = (q_1 + t, q_2)$

$$\begin{aligned} df_p\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \times 1 + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \times 0\right) &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(q) \times 1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(q) \times 0 \\ \Leftrightarrow df_p\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q)\right) &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(q) \end{aligned} \quad (2.2)$$

- para $\alpha(t) = (q_1, q_2 + t)$

$$\begin{aligned} d f_p \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \times 0 + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \times 1 \right) &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(q) \times 0 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(q) \times 1 \\ \Leftrightarrow d f_p \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right) &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(q) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assim,

$$\begin{cases} d f_p \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right) &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(q) \\ d f_p \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right) &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(q). \end{cases}$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1), obtemos

$$d f_p \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) u'(0) + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) v'(0) \right) = d f_p \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right) u'(0) + d f_p \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right) v'(0).$$

Ou seja, a aplicação $d f_p$ é linear.

□

Definição 7. Um vector $u \in \mathbb{R}^3$ diz-se **normal** a uma superfície S num ponto $p \in S$, se u é ortogonal a todo o vector tangente a S no ponto p .

De entre todos os vectores normais à superfície no ponto p , tem particular interesse o vector normal unitário definido por

$$N(p) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\|}.$$

Definição 8. Uma superfície regular S diz-se **orientável** se existir uma aplicação suave $N : S \rightarrow S^2$ tal que $N(p)$ é normal a S no ponto p , para todo o $p \in S$. A aplicação N diz-se uma orientação da superfície S .

Seja $N : S \rightarrow S^2$ uma orientação de uma superfície S . Então $-N : S \rightarrow S^2$ também é uma orientação de S . Assim, numa superfície conexa orientável existem duas orientações distintas.

Capítulo 3

Projecções Cartográficas

Sendo a Terra aproximadamente esférica, a maneira mais adequada para a representar evitando distorções é o globo, o que implica apenas as transformações de escala, decorrentes da redução do seu tamanho. Contudo, os globos apresentam diversos inconvenientes práticos, que são eliminados quando a Terra é representada enquanto mapa sobre uma superfície plana, o que, além da mudança de escala, acrescenta a necessidade de transformar uma superfície aproximadamente esférica numa superfície plana. É a este sistema de transformação que se denomina *projecção cartográfica*; a sua construção implica, então, a aplicação de um factor de redução para a construção de um modelo reduzido da Terra e a sua subsequente planificação.

Existe uma grande variedade de projecções cartográficas. Neste trabalho, procurar-se-á desenvolver um estudo pormenorizado da projecção estereográfica e das projecções cilíndricas equatoriais.

Vamos supor o primeiro passo, redução do modelo da Terra, efectuado e consideraremos como modelo da Terra a esfera S^2 de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1. As projecções que vamos estudar serão difeomorfismos de uma parte da esfera (a esfera privada de um ponto ou de um meridiano) num rectângulo $]a, b[\times]c, d[$ de \mathbb{R}^2 . As aplicações inversas destes difeomorfismos proporcionam parametrizações da esfera, pelo que o rectângulo $]a, b[\times]c, d[$ será um mapa da região da esfera considerada.

3.1 Projecção Estereográfica

Esta projecção era conhecida por Hiparco de Nicea (190-120 a.C.) e Ptolomeu (90-168 d.C.) descreveu-a na sua obra *Geographia*. No entanto, o termo “projecção estereográfica” foi utilizado pela primeira vez por F.D’Aiguillon (1613).

A projecção estereográfica resulta da projecção geométrica de pontos da superfície da Terra sobre um plano, tangente ou secante a ela.

Aqui, vamos descrever a projecção estereográfica a partir do pólo norte sobre o plano equatorial.

Seja $N(0, 0, 1)$ e $\delta_N : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação que a qualquer ponto $Q \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ associa o ponto P , intersecção da recta NQ com o plano equatorial ($z = 0$).

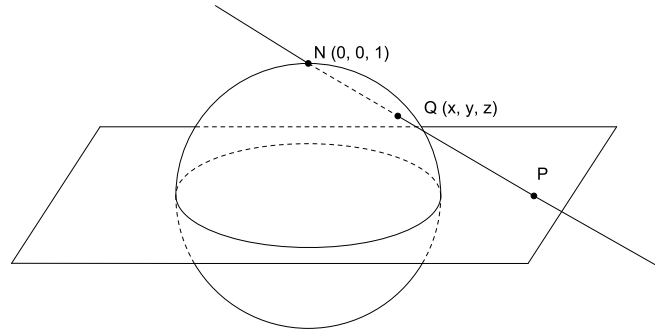


Figura 3.1: Projecção Estereográfica.

A equação vectorial da recta definida pelo ponto $Q = (x, y, z)$ e pelo pólo norte é:

$$(X, Y, Z) = (0, 0, 1) + t(x, y, z - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} X = xt \\ Y = yt \\ Z = 1 + t(z - 1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O ponto de intersecção da recta NQ com o plano equatorial tem a forma:

$$(X, Y, 0) = (0, 0, 1) + t(x, y, z - 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$\begin{cases} X = xt \\ Y = yt \\ 0 = 1 + t(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = xt \\ Y = yt \\ t = \frac{1}{1-z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{x}{1-z} \\ Y = \frac{y}{1-z} \\ t = \frac{1}{1-z} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta_N : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \end{aligned}$$

Esta aplicação é a designada **projecção estereográfica** de pólo norte.

Esta projecção é, de facto, um homeomorfismo e a sua inversa (que vamos agora determinar) fornece uma parametrização da esfera.

Caracterização da aplicação $\delta_N^{-1} = \sigma_N$

Consideremos $P(u, v, 0)$, um ponto do plano equatorial, e a recta definida pelo ponto P e pelo pólo norte.

Temos que

$$\begin{aligned} (X, Y, Z) &= (0, 0, 1) + t(u, v, -1) \\ &= (ut, vt, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A intersecção da recta com $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ é caracterizada por

$$\begin{aligned} u^2 t^2 + v^2 t^2 + (1-t)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow u^2 t^2 + v^2 t^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow t^2 (u^2 + v^2 + 1) &= 2t \\ \Leftrightarrow t = 0 \quad \vee \quad t &= \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para $t = 0$, a intersecção dá o ponto $N(0,0,1)$, que está excluído.

Substituindo (3.2) em (3.1), obtém-se

$$(X, Y, Z) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma_N : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ (u, v) &\longmapsto (x, y, z) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

é a inversa de δ_N .

Como

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial \sigma_N}{\partial u}(u, v) &= \\ &= \left(\frac{2(u^2 + v^2 + 1) - 2u \times 2u}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{-2u \times 2v}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{2u(u^2 + v^2 + 1) - 2u(u^2 + v^2 - 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right) \\ &= \left(\frac{2(-u^2 + v^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{-4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4u}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right) \\ \bullet \quad \frac{\partial \sigma_N}{\partial v}(u, v) &= \\ &= \left(\frac{-2v \times 2u}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{2(u^2 + v^2 + 1) - 2v \times 2v}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{2v(u^2 + v^2 + 1) - 2v(u^2 + v^2 - 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right) \\ &= \left(\frac{-4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{2(u^2 - v^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4v}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right) \end{aligned}$$

logo

$$\frac{\partial \sigma_N}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma_N}{\partial v}(u, v) =$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{-16uv^2 - 8u(u^2 - v^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^4}, \frac{-16u^2v - 8v(-u^2 + v^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^4}, \frac{4(-u^2 + v^2 + 1)(u^2 - v^2 + 1) - 16u^2v^2}{(u^2 + v^2 + 1)^4} \right) \\
 &= \left(\frac{-8u(u^2 + v^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^4}, \frac{-8v(u^2 + v^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^4}, \frac{4(-u^2 + v^2 + 1)(u^2 - v^2 + 1) - 16u^2v^2}{(u^2 + v^2 + 1)^4} \right) \\
 &= \left(\frac{-8u}{(u^2 + v^2 + 1)^3}, \frac{-8v}{(u^2 + v^2 + 1)^3}, \frac{4(-u^2 + v^2 + 1)(u^2 - v^2 + 1) - 16u^2v^2}{(u^2 + v^2 + 1)^4} \right).
 \end{aligned}$$

Este vector nunca se anula, pois se $u = v = 0$ a última coordenada é 4.

O que significa que

$$\frac{\partial \sigma_N}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma_N}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0).$$

Assim, pela Proposição 2, podemos concluir que a aplicação σ_N é uma parametrização da esfera toda excepto o pólo norte. Para incluir este pólo apenas é necessário considerar a parametrização

$$\begin{aligned}
 \sigma_S : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \\
 (u, v) &\longmapsto (x, y, z) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, -\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).
 \end{aligned}$$

3.2 Projecções Cilíndricas

Numa projecção cilíndrica, começa-se por ajustar o cilindro ao modelo da Terra; posteriormente, é efectuada uma projecção dos pontos do modelo sobre ele e, finalmente, o cilindro é longitudinalmente cortado e planificado.

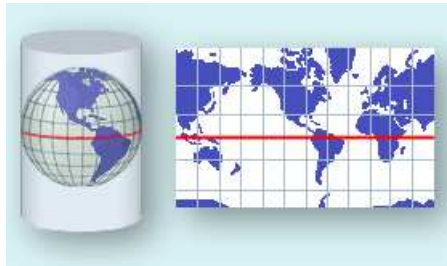


Figura 3.2: Projecção cilíndrica equatorial. [28]

Aqui, tal como para a esfera, vamos trabalhar com um cilindro (de altura variável) privado de um meridiano. Ou seja, vamos considerar

$$C^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -h < z < h\} \setminus \{(-1, 0)\} \times]-h, h[, \quad h > 0.$$

Assim, mais formalmente, podemos dizer que uma projecção cilíndrica é uma aplicação

$$\pi_p : S_*^2 \longrightarrow]-\pi, \pi[\times]-h, h[$$

em que π_p se pode escrever como uma composta $\pi_p = \chi_{cil} \circ \pi_c$, onde

- π_c é uma aplicação da esfera no cilindro que envia os meridianos e paralelos da esfera nos meridianos e paralelos do cilindro;
- χ_{cil} é a aplicação que “planifica” o cilindro, dada por

$$\chi_{cil} : C^* \longrightarrow]-\pi, \pi[\times]-h, h[$$

$$(x, y, z) \longmapsto \begin{cases} (\arccos x, z), & y > 0 \\ (-\arccos x, z), & y \leq 0. \end{cases}$$

Aliás, χ_{cil} é exactamente a inversa de

$$\begin{aligned} \Phi :]-\pi, \pi[\times]-h, h[&\longrightarrow C^* \\ (\varphi, z) &\longmapsto (\cos \varphi, \sin \varphi, z). \end{aligned}$$

Por outro lado, a aplicação χ_{cil}

- é contínua, pois para $y = 0 \Rightarrow x = 1$ e $\arccos 1 = 0 = -\arccos 1$;
- é suave, pois $\chi_{cil} \circ \Phi = id_{]-\pi, \pi[\times]-h, h[}$ é suave. (Prop. 5)

Logo, χ_{cil} é um difeomorfismo.

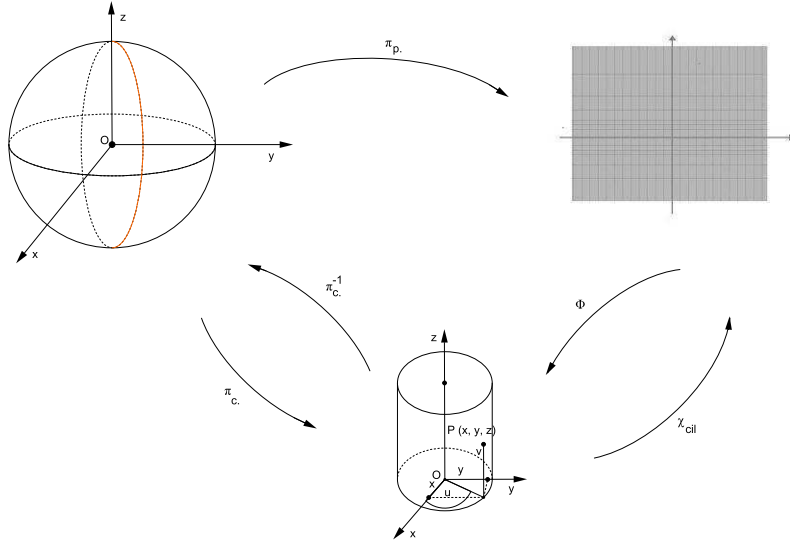


Figura 3.3: Interpretação geométrica de uma projecção cilíndrica.

Deste modo, uma projecção cilíndrica é completamente determinada pela aplicação π_c . Vamos, então, analisar a forma analítica da aplicação π_c .

Numa projecção cilíndrica, um ponto (x, y, z) da superfície terrestre é projectado num ponto (X, Y, Z) do cilindro, de tal modo que: os meridianos da esfera são enviados em meridianos de mesma longitude; o Equador no Equador e os restantes paralelos em paralelos, eventualmente de outra latitude, mas preservando o sinal da latitude.

Assim, o ponto $(X, Y, Z) \in C^*$, imagem de $(x, y, z) \in S_*^2$, verifica

$$(X, Y) = \lambda (x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad Z = f(z).$$

Por outro lado,

$$X^2 + Y^2 = 1$$

logo

$$\begin{aligned} (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 &= 1 \\ \lambda^2 &= \frac{1}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{o sinal da latitude mantém-se})$$

Assim,

$$(X, Y, Z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f(z) \right).$$

Deste modo, chegamos à seguinte definição:

Definição 9. $\pi_p : S_*^2 \longrightarrow]-\pi, \pi[\times]-h, h[$ é uma **projecção cilíndrica** se existir uma aplicação π_c da seguinte forma

$$\begin{aligned} \pi_c : S_*^2 &\longrightarrow C^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -h < z < h\} \setminus \{(-1, 0)\} \times]-h, h[\\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f(z) \right) \end{aligned}$$

sendo $f :]-1, 1[\longrightarrow]-h, h[$, $f(0) = 0$, um difeomorfismo, tal que $\pi_p = \chi_{cil} \circ \pi_c$.

Proposição 8. Nas condições da Definição 9, a aplicação π_c é um difeomorfismo e a sua inversa é dada por

$$\begin{aligned} \pi_c^{-1} : C^* &\longrightarrow S_*^2 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \left(X \sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2}, Y \sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2}, f^{-1}(Z) \right). \end{aligned}$$

Demonstração. A aplicação π_c é bijectiva e uma restrição de

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \mathbb{R}^2 \times]-1, 1[\setminus \{(x, 0, z), x \in]-\infty, 0] \wedge z \in]-1, 1[\} &\longrightarrow C^* \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f(z) \right) \end{aligned}$$

que é suave.

Logo, pela Proposição 6, a aplicação π_c é suave.

Como para $(x, y, z) \in S_*^2$, $(X, Y, Z) \in C^*$

$$\bullet \quad Z = f(z) \Leftrightarrow z = f^{-1}(Z)$$

$$\bullet \quad X = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - z^2}} \Leftrightarrow x = X \sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2}$$

$$\bullet Y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - z^2}} \Leftrightarrow y = Y \sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2}$$

temos

$$\begin{aligned} \pi_c^{-1} : C^* &\longrightarrow S_*^2 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \left(X \sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2}, Y \sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2}, f^{-1}(Z) \right). \end{aligned}$$

A aplicação π_c^{-1} é uma restrição de

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi_c^{-1}} : \mathbb{R}^2 \times]-h, h[&\longrightarrow S_*^2 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \left(X \sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2}, Y \sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2}, f^{-1}(Z) \right) \end{aligned}$$

que é suave.

Logo, a aplicação π_c^{-1} também é suave.

Assim, podemos concluir que a aplicação π_c é um difeomorfismo.

□

Observe-se que no mapa associado a π_p , isto é, $] - \pi, \pi[\times] - h, h[$, um ponto de coordenadas geográficas (φ, θ) será representado pelo ponto $(\varphi, f(\sin \theta))$.

Como a imagem de $(\varphi, f(\sin \theta))$ através da parametrização $\pi_c^{-1} \circ \Phi$ de S_*^2 , associada à projecção π_c , é exactamente o ponto de S_*^2 de coordenadas geográficas (φ, θ) , podemos dizer que $(\varphi, f(\sin \theta))$ são as coordenadas deste ponto no mapa $] - \pi, \pi[\times] - h, h[$ associado à projecção π_c .

Factores de escala ao longo dos meridianos e dos paralelos numa projecção cilíndrica

A concepção de determinadas projecções visa conseguir algumas propriedades, úteis para determinadas aplicações. Por exemplo, na concepção da projecção cilíndrica equidistante meridiana, a escala principal é conservada ao longo dos meridianos.

Com vista na determinação de projecções cilíndricas vamos, agora, abordar os factores de escala ao longo dos meridianos e dos paralelos.

Numa projecção cilíndrica, os paralelos de latitude θ , com θ pertencente a um determinado intervalo, são, no mapa plano, segmentos de recta horizontais de equação

$y = g(\theta) = f(\sin \theta)$. Ou seja, no globo terrestre, se considerarmos o raio unitário, o arco de qualquer meridiano entre as latitudes θ e $(\theta + t)$ tem comprimento t , enquanto que a sua imagem no mapa tem comprimento $g(\theta + t) - g(\theta)$.

Isto é,

$$\Delta dist_{mapa} = g(\theta + t) - g(\theta), \text{ enquanto que } \Delta dist_{globo} = t.$$

Assim, o factor de escala ao longo do meridiano, de longitude φ , no ponto de latitude θ é dado por:

$$K_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\theta + t) - g(\theta)}{t} = g'(\theta).$$

Por outro lado, como se pode observar na figura abaixo, as distâncias ao longo dos paralelos entre dois meridianos estão, no globo terrestre, a tender para zero, à medida que nos estamos a aproximar dos pólos. No entanto, nas projecções cilíndricas, estas distâncias têm que ser iguais no mapa, porque, aqui, os meridianos são rectas paralelas. Assim, as distâncias entre os meridianos, em cada paralelo, serão no mapa maiores, em função do θ , do que as distâncias no globo, à excepção do que se verifica no Equador (paralelo padrão).

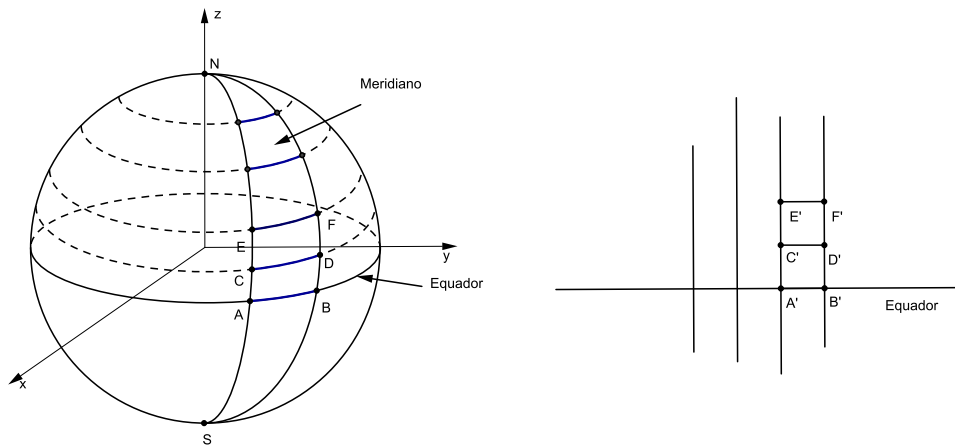
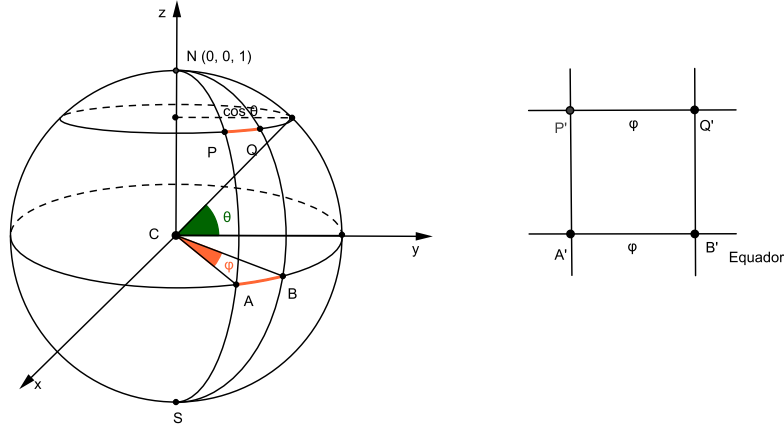


Figura 3.4: Correspondência de pontos sobre os meridianos terrestres e mapa.

Vamos, então, estudar este alongamento horizontal.

Sejam \widehat{AB} e \widehat{PQ} arcos de paralelos entre dois meridianos, sendo o primeiro parte do Equador e o segundo parte do paralelo de latitude θ .



$$\widehat{AB} = \varphi$$

$$\widehat{PQ} = \varphi \cos \theta = \widehat{AB} \cos \theta$$

Na representação do mapa plano temos a correspondência $\widehat{AB} = \overline{A'B'}$ e como nele os meridianos são paralelos, então, $\widehat{AB} = \overline{A'B'} = \overline{P'Q'}$.

Assim,

$$\widehat{PQ} = \overline{P'Q'} \times \cos \theta$$

$$\overline{P'Q'} = \widehat{PQ} \times \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\overline{P'Q'} = \widehat{PQ} \times \sec \theta$$

Ou seja, o factor de escala ao longo do paralelo de latitude θ só depende de θ e é dado por: $K_p = \sec \theta$.

Logo, no mapa, como $\sec \theta > 1$ para $\theta \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, as distâncias entre os meridianos vão-se expandindo pelo factor $\sec \theta$ e as distorções aumentam conforme $|\cos \theta|$ tende para zero (próximo dos pólos).

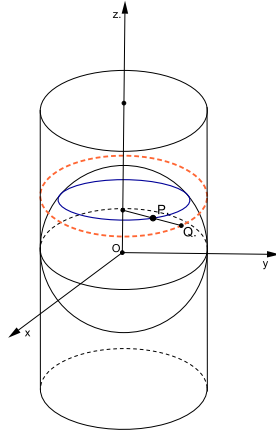
Como no equador $\theta = 0$, o factor de escala neste paralelo é 1.

Concluimos, assim, que em qualquer projecção cilíndrica equatorial o factor de escala ao longo dos paralelos só depende de θ e é dado por: $K_p = \sec \theta$. No entanto, o factor de escala ao longo dos meridianos, $K_m = g'(\theta) = f'(\sin \theta) \cos \theta$, também depende da função f .

Utilizando todo o estudo desenvolvido anteriormente, vamos agora apresentar alguns exemplos concretos de projecções cilíndricas.

3.2.1 Projecção de Arquimedes

Consideremos a figura:



Para cada ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, \pm 1)$, na esfera, existe uma única semi-recta paralela ao plano xOy com origem num ponto do eixo Oz e que passa por P . Esta semi-recta intersecta o cilindro no ponto $Q = (X, Y, Z)$ que verifica

$$Z = z \quad \text{e} \quad (X, Y) = \lambda(x, y), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

logo, consideramos o cilindro de altura 2 ($h = 1$) e a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_c : \quad S_*^2 &\longrightarrow C^* \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right). \end{aligned}$$

Esta aplicação é a designada **projecção de Arquimedes**.

Nesta projecção, temos

$$f(z) = z; \quad g(\theta) = f(\sin \theta) = \sin \theta; \quad K_m = g'(\theta) = \cos \theta.$$

Ou seja, no mapa associado a esta projecção, $]-\pi, \pi[\times]-1, 1[$, o ponto de coordenadas

geográficas (φ, θ) é representado pelo ponto $(\varphi, \text{sen } \theta)$ e os paralelos ficam cada vez menos espaçados à medida que nos afastamos do Equador.

Caracterização da aplicação π_c^{-1}

Como $Z = z$, temos

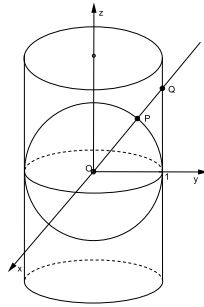
$$f^{-1}(Z) = Z$$

logo

$$\begin{aligned} \pi_c^{-1} : \quad C^* &\longrightarrow S_*^2 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \left(X \sqrt{1 - Z^2}, Y \sqrt{1 - Z^2}, Z \right). \end{aligned}$$

3.2.2 Projecção Cilíndrica Central

Consideremos a figura:



Para cada ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, \pm 1)$ na esfera, existe uma única semi-recta que passa por P e pelo centro da esfera. Esta semi-recta, \vec{OP} , intersecta o cilindro no ponto $Q = (X, Y, Z)$.

Como

$$(X, Y, Z) = \lambda (x, y, z), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

temos, considerando o cilindro de *altura infinita* ($h = +\infty$),

$$\begin{aligned} \pi_c : \quad S_*^2 &\longrightarrow C^* \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned}$$

Esta aplicação é a designada **projecção cilíndrica central**.

Nesta projecção

- $f(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$;
- $g(\theta) = f(\operatorname{sen} \theta) = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta$;
- $K_m = g'(\theta) = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$.

Ou seja, no mapa associado a esta projecção, $]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$, o ponto de coordenadas geográficas (φ, θ) é representado por $(\varphi, \operatorname{tg} \theta)$ e os paralelos ficam cada vez mais afastados à medida que nos afastamos do Equador.

Caracterização da aplicação π_c^{-1}

Como

$$Z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\Rightarrow Z^2 = \frac{z^2}{1-z^2}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = (1-z^2) Z^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 (1+Z^2) = Z^2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{Z}{\sqrt{1+Z^2}} \quad (z \text{ e } Z \text{ têm o mesmo sinal})$$

logo

$$f^{-1}(Z) = \frac{Z}{\sqrt{1+Z^2}}$$

e

$$\sqrt{1-f^{-1}(Z)^2} = \sqrt{1 - \frac{Z^2}{1+Z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Z^2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \pi_c^{-1} : \quad C^* &\longrightarrow S_*^2 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \left(\frac{X}{\sqrt{1+Z^2}}, \frac{Y}{\sqrt{1+Z^2}}, \frac{Z}{\sqrt{1+Z^2}} \right). \end{aligned}$$

3.2.3 Projecção Equidistante Meridiana

Numa projecção cilíndrica equidistante meridiana, as distâncias ao longo dos meridianos e do Equador são preservadas, pelo que, $K_m = g'(\theta) = 1$.

Assim,

$$g(\theta) = f(\text{sen } \theta) = \theta + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mas para $\theta = 0$, temos

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0,$$

logo

$$f(\text{sen } \theta) = \theta \Leftrightarrow f(z) = \text{arc sen } z.$$

Assim, considerando o cilindro de altura π $\left(h = \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \pi_c : \quad S_*^2 &\longrightarrow C^* \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{arc sen } z \right) \end{aligned}$$

é a designada **projecção equidistante meridiana**.

No mapa associado a esta projecção, $] - \pi, \pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, o ponto de coordenadas geográficas (φ, θ) é representado por ele próprio.

Como

$$f(z) = \text{arc sen } z = Z, \quad Z \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

temos

$$f^{-1}(Z) = z = \text{sen } Z$$

e

$$\sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 Z} = \sqrt{\cos^2 Z} = |\cos Z| = \cos Z$$

pelo que

$$\begin{aligned}\pi_c^{-1} : C^* &\longrightarrow S_*^2 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto (X \cos Z, Y \cos Z, \sin Z).\end{aligned}$$

3.2.4 Projecção de Mercator

Numa viagem marítima, é compreensível que se procure seguir o caminho mais curto, ou seja, o arco menor de um círculo máximo, para não se perder tempo inutilmente. Contudo, os arcos de círculos máximos formam ângulos variáveis com os meridianos, o que exige mudanças constantes de rumo, o que na prática não é funcional. Além disso, os círculos máximos passam frequentemente pelas zonas polares, onde a navegação é menos segura, ou mesmo impossível. Por isso, a forma mais natural de navegar no mar alto é obrigar o barco a manter um ângulo constante com o norte da bússola. Nesta situação, o barco irá descrever sobre o mar uma curva - chamada *loxodromia* ou *linha de rumo* - que corta todos os meridianos segundo um ângulo constante.

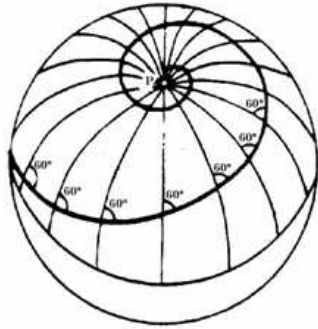


Figura 3.5: Curva Loxodrômica de direcção 60°. [38]

Foi, essencialmente, com esta finalidade prática à navegação que o geógrafo e cartógrafo Gerhard Kremer (1512-1594), conhecido pelo nome latinizado Gerardus Mercator, elaborou o seu mapa.

Mercator percebeu que, como em toda a projecção cilíndrica há um alongamento da distância entre os meridianos no mapa, dado por $K_p = \sec \theta$, a distância vertical do paralelo de latitude θ também poderia ser alongada no mapa com o mesmo factor $\sec \theta$; deste modo, ficariam preservados os ângulos no globo terrestre para o mapa (mapa conformal).

Deste modo, considera-se a condição

$$K_m = g'(\theta) = \sec \theta$$

onde

$$g'(\theta) = \sec \theta \Rightarrow g(\theta) = \int \sec \theta \, d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$f(\sec \theta) = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c$$

em particular

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \operatorname{argth}(\sec \theta) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sec \theta)^2}{1 - \sec^2 \theta} = \ln \frac{|1 + \sec \theta|}{\sqrt{1 - \sec^2 \theta}} \\ &= \ln \frac{|1 + \sec \theta|}{|\cos \theta|} = \ln \left| \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sec \theta}{\cos \theta} \right| = \ln |\sec \theta + \tan \theta| \end{aligned}$$

logo

$$f(z) = \operatorname{argth} z$$

e, considerando o cilindro de *altura infinita*,

$$\begin{aligned} \pi_c : \quad S_*^2 &\longrightarrow C^* \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \operatorname{argth} z \right). \end{aligned}$$

A aplicação π_c é a designada projecção de **Mercator**.

No mapa de Mercator associado a esta projecção, $]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$, o ponto de coordenadas geográficas (φ, θ) é representado no mapa por $(\varphi, \ln |\sec \theta + \tan \theta|)$.

A $\tilde{\theta} = \ln |\sec \theta + \tan \theta|$ chamamos latitude no mapa de Mercator.

Caracterização da aplicação π_c^{-1}

Como

$$f(z) = \operatorname{argth} z = Z$$

logo

$$f^{-1}(Z) = z = th Z$$

e

$$\sqrt{1 - f^{-1}(Z)^2} = \sqrt{1 - th^2 Z} = \sqrt{\frac{1}{ch^2 Z}} = \sqrt{sech^2 Z} = sech Z.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \pi_c^{-1} : \quad C^* &\longrightarrow S_*^2 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto (X sech Z, Y sech Z, th Z). \end{aligned}$$

No capítulo 6, vamos verificar que as loxodromias, nesta projecção, são representadas por rectas.

3.3 Contribuição de Pedro Nunes e outros Matemáticos insígnies para a Projecção de Mercator

Ciente dos erros das cartas planas, que esqueciam a curvatura da Terra e na sequência de uma pergunta do navegador Martim Afonso de Sousa regressado de uma viagem ao Brasil, Pedro Nunes¹, na sua obra *Tratado da Sphera* (1537), refere duas maneiras de navegar, provando a sua distinção: seguindo os rumos, por uma “linha curva e irregular” ou por círculos máximos, a navegação dita ortodrómica.

Ressalta aqui a sua primeira alusão à loxodromia, de loxos (oblíqua) + dromos (carreira) - curva que cruza todos meridianos terrestres segundo um ângulo constante (rumo) e cujas volutas se dirigem para o pólo, sem o atingirem em tempo finito.

A primeira parte da obra supracitada não passa de uma tradução, com bastantes anotações, do *Tractatus de Sphaera* de Sacrobosco. Em anexo, Pedro Nunes publicou dois

¹Pedro Nunes (1502-1578), nasceu em Alcácer do Sal na época áurea dos descobrimentos portugueses. De ascendência judia, estudou Línguas, Filosofia e Medicina na Universidade de Lisboa, tendo recebido o grau de doutor em Medicina. Em 1529 foi nomeado cosmógrafo-mor do reino por D. João III e em 1547 assumiu o cargo de cosmógrafo-mor. Entretanto, em 1544, foi nomeado professor de matemática da Universidade de Coimbra.

tratados em português sobre questões de navegação. Nestes tratados afirma com toda a clareza que os círculos máximos, que dão a menor distância entre dois pontos, não são, salvo no caso do Equador e dos meridianos, rotas de rumo constante. Isto é, quem quiser seguir por um círculo máximo tem que estar sempre a mudar o rumo (o ângulo com o meridiano).

A vantagem que há em navegar mantendo o rumo constante é, portanto, acompanhada pelo inconveniente de a rota seguida não ser a mais curta.

Num destes tratados, *Tratado en defensam da carta de marear*, Pedro Nunes enuncia duas propriedades desejáveis para os mapas: a preservação de ângulos e a representação de linhas de rumo por linhas rectas. Mostra-se perfeitamente consciente de que um mapa satisfazendo tais requisitos não conservará distâncias e áreas, exigindo correcções por tábuas ou instrumentos; contudo, é lúcido quanto às vantagens deste tipo de mapa na prática da navegação. Num tal mapa, unindo o ponto de partida e o ponto de destino por um segmento de recta, obtém-se imediatamente qual deve ser o rumo a seguir na viagem.

O problema matemático que se levanta é o de como traçar mapas com essas propriedades. Intuitivamente, vê-se que na quadrícula meridianos/paralelos o espaçamento entre estes últimos tem que aumentar com a latitude. Nos tratados de 1537, Pedro Nunes apenas esboça uma solução para o problema. Contudo, os requisitos de Pedro Nunes são exactamente o que tornou o grande mapa-múndi de Mercator (1569) tão útil para a navegação. Uma eventual inspiração de Mercator em Pedro Nunes permanece matéria de grande controvérsia.

Mercator, no seu mapa, eliminou os problemas que a curva loxodrómica levantava aos marinheiros, espaçando os paralelos em intervalos crescentes do Equador até aos pólos mediante o uso do método das “latitudes crescentes”. Assim nasceu a chamada *Projecção de Mercator*.

O mapa torna-se um instrumento sem igual para a navegação, uma vez que habilita os marinheiros a resolverem gráfica e simplesmente todos os problemas relacionados com a navegação loxodrómica. No entanto, Mercator não deu qualquer explicação sobre os seus métodos, fossem eles gráficos ou matemáticos; esse trabalho ficou para seus sucessores. Para colocar os paralelos no seu mapa era necessário calcular o valor de $\int \sec \theta \, d\theta$, no entanto, nessa época ainda não se conhecia o *conceito de integral*.

Na realidade, as ideias intuitivas do *conceito de integral* como limite da soma de infi-

nitais parcelas, que apenas foram desenvolvidas no século XVII por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), já estavam a despertar. Naturalmente, com os recursos da época, o mapa de Mercator continha alguns erros na colocação dos paralelos.

Em 1599, Edward Wright, na sua obra *Certaine Errors in Navigation*, apresenta uma explicação da construção do mapa de Mercator e fornece à navegação uma tabela das aproximações do somatório do integral $r \int \sec \theta \, d\theta$ para valores de θ entre 0 e 45° em intervalos de 1 minuto.

Os geógrafos da época que quisessem compreender a construção de Mercator tinham que fazer uma estimativa deste somatório. Estas estimativas foram sistematizadas com o conceito de *Logaritmo* introduzido por Nappier.

Em 1620, Edmund Gunter publicou a tabela de $\ln(\tan \theta)$. Mais tarde, em 1645, Henry Bond publicou *Epitome of Navigation* que continha a descoberta de que $\int_0^{\tilde{\theta}} \sec \theta \, d\theta = \ln \tan \left(\frac{\tilde{\theta}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$, no entanto, não provou a igualdade.

Demonstrar esta igualdade tornou-se um desafio para os Matemáticos da época.

Durante a década 1660-1670, Newton e Leibniz, com a “invenção” do cálculo infinitesimal, concretizaram as principais preocupações dos matemáticos do século XVII e em 1668, James Gregory provou a igualdade, utilizando, contudo, um argumento geométrico extremamente complexo. Em 1670, usando os métodos do Cálculo Integral, recém aparecidos, Isaac Barrow apresentou uma prova simples da igualdade.

É de salientar, ainda, que no século XVI, o cosmógrafo real Pedro Nunes descobriu a *linha de rumo* e explicou que a distância mínima a percorrer por um barco entre dois pontos quaisquer da Terra seria o arco menor do círculo máximo que passa por esses dois pontos. M. C. Escher (1898-1972) representou a ideia das *linhas de rumo*, 300 anos depois.



Figura 3.6: *Sphere Spirals*. [30]

Capítulo 4

Comprimentos, Ângulos e Áreas - Primeira Forma Fundamental

Este capítulo começa por abordar o instrumento que nos permite calcular: o comprimento de uma curva numa superfície S a partir da curva correspondente no mapa; o ângulo entre duas direcções em S a partir das direcções correspondentes no mapa; a área de uma região limitada de S a partir da região correspondente no mapa.

No final, são estudadas as condições necessárias e suficientes para que uma aplicação entre duas superfícies arbitrárias seja uma isometria, conforme e equiareal. Este estudo permitir-nos-á verificar, posteriormente, se numa determinada projecção as relações de distância entre os vários locais da Terra são conservados, assim como os ângulos e as áreas.

O conteúdo deste capítulo baseia-se essencialmente nas referências bibliográficas [2], [14], [16] e [18].

4.1 Comprimento de uma Curva numa Superfície

Seja $\sigma : U \longrightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S .

Da parametrização σ vamos extrair toda a informação necessária para medir o comprimento de uma curva na superfície S a partir da curva correspondente no mapa U .

Consideremos as curvas $\alpha : [a, b] \longrightarrow U$, $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, e $\gamma : [a, b] \longrightarrow S$ tal que $\gamma = \sigma \circ \alpha$.

O comprimento do arco de γ desde $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ é dado por

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Pelo Teorema da Função Composta, temos

$$\gamma'(t) = (\sigma \circ \alpha)'(t) = u'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u(t), v(t)).$$

Assim, abreviando $(u(t), v(t))$ por q , temos

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= \left\langle u'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + v'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), u'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + v'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle \\ &= \left(u'(t)\right)^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle + 2u'(t)v'(t) \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle + \left(v'(t)\right)^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle \end{aligned}$$

e considerando as seguintes notações

- $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle = E(q) = E$
- $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle = F(q) = F$
- $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle = G(q) = G$

pode-se escrever

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u(t), v(t)) \left(u'(t)\right)^2 + 2F(u(t), v(t)) u'(t) v'(t) + G(u(t), v(t)) \left(v'(t)\right)^2} dt.$$

Assim, para calcular $l(\gamma)$ a partir de α é suficiente conhecer as funções E, F e $G : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Estas são, naturalmente, relacionadas à seguinte aplicação.

Definição 10. *Seja S uma superfície regular e $p \in S$.*

A aplicação

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

*é chamada a **primeira forma fundamental** de S no ponto p .*

A primeira forma fundamental é a restrição ao espaço tangente do produto interno canónico de \mathbb{R}^3 .

Dada uma parametrização σ de uma superfície regular S e considerando as funções $E(q)$, $F(q)$ e $G(q)$, para

$$w = a \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + b \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \in T_p S$$

temos

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \left\langle a \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + b \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), a \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + b \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle \\ &= a^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle + 2ab \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle + b^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle \\ &= a^2 E(q) + 2ab F(q) + b^2 G(q) \\ &= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Às funções E, F e $G : U \longrightarrow \mathbb{R}$ chamamos os **coeficientes da primeira forma fundamental** da superfície S , relativamente à parametrização σ .

Exemplos

- 1) Para a parametrização da esfera em termos da latitude e longitude

$$\sigma(\varphi, \theta) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

temos

$$\begin{aligned} \bullet E(\varphi, \theta) &= \langle (-\cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0), (-\cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0) \rangle \\ &= \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \\ &= \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet F(\varphi, \theta) &= \langle (-\cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0), (-\operatorname{sen} \theta \cos \varphi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \cos \theta) \rangle \\ &= \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet G(\varphi, \theta) &= \langle (-\operatorname{sen} \theta \cos \varphi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \cos \theta), (-\operatorname{sen} \theta \cos \varphi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \cos \theta) \rangle \\ &= \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \theta \\ &= \operatorname{sen}^2 \theta (\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) + \cos^2 \theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ou seja, o comprimento de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$, de qualquer curva na esfera, dada por

$$\gamma(t) = (\cos \theta(t) \cos \varphi(t), \cos \theta(t) \operatorname{sen} \varphi(t), \operatorname{sen} \theta(t))$$

é igual a

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\cos^2 \theta (\varphi'(t))^2 + (\theta'(t))^2} dt.$$

Por exemplo, um paralelo de latitude $\tilde{\theta}$ parametrizado por

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos \tilde{\theta} \cos t, \cos \tilde{\theta} \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} \tilde{\theta}) \\ &= \sigma(t, \tilde{\theta}), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

tem comprimento

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \tilde{\theta} + 0} dt = [\cos \tilde{\theta} \cdot t]_0^{2\pi} = 2\pi \cos \tilde{\theta}.$$

Podemos observar que no mapa a curva correspondente tem comprimento 2π .

Ou seja, para valores de $\tilde{\theta}$ próximos de $\pm \frac{\pi}{2}$ (pólos) há grandes dilatações dos comprimentos no mapa.

2) Para o cilindro circular vertical, parametrizado por

$$\Phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

temos

- $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = (0, 0, 1)$
- $E(u, v) = \langle (-\sin u, \cos u, 0), (-\sin u, \cos u, 0) \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$
- $F(u, v) = \langle (-\sin u, \cos u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0$
- $G(u, v) = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1$

O comprimento de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$, de qualquer curva no cilindro, dada por

$$\gamma(t) = (\cos u(t), \sin u(t), v(t))$$

é igual a

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} dt.$$

Escrevendo $\gamma = \Phi \circ \alpha$, onde $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, temos $l(\gamma) = l(\alpha)$.

Assim, por exemplo, um paralelo de latitude $\tilde{\theta}$ parametrizado por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \tilde{\theta}) = \Phi(t, \tilde{\theta}), \quad t \in [0, 2\pi]$$

tem comprimento

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

3) Para o plano parametrizado por $\psi(u, v) = P + ux + vy$, $u, v \in \mathbb{R}$, $P, x, y \in \mathbb{R}^3$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Temos

- $\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = x$
- $\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) = y$
- $E(u, v) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 1$
- $G(u, v) = \langle y, y \rangle = \|y\|^2 = 1$
- $F(u, v) = \langle x, y \rangle = 0$

O comprimento de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$, de qualquer curva no plano, $\gamma(t) = P + u(t)x + v(t)y$, é igual a

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} dt = l(\alpha)$$

onde α é a curva correspondente a γ no mapa.

4.2 Ângulo entre duas Direcções numa Superfície

Seja $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S .

Consideremos as curvas regulares $\delta_1 = (u_1, v_1) : I \rightarrow U$, $\delta_2 = (u_2, v_2) : J \rightarrow U$ e $\gamma_1 : I \rightarrow S$, $\gamma_2 : J \rightarrow S$ definidas por $\gamma_1 = \sigma \circ \delta_1$ e $\gamma_2 = \sigma \circ \delta_2$.

Sejam $t_1 \in I$, $t_2 \in J$, $q \in U$ e $p \in S$ tais que $\delta_1(t_1) = \delta_2(t_2) = q$ e $\sigma(q) = p$.

Então $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$.

O ângulo entre γ_1 e γ_2 , no ponto p , é definido como sendo o ângulo α ($\alpha \in [0, \pi]$) formado pelos vectores $\gamma_1'(t_1)$ e $\gamma_2'(t_2)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{\langle \gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2) \rangle}{\|\gamma'_1(t_1)\| \|\gamma'_2(t_2)\|} \\
 &= \frac{\left\langle u'_1(t_1) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + v'_1(t_1) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), u'_2(t_2) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + v'_2(t_2) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle}{\left(Eu'_1(t_1)^2 + 2Fu'_1(t_1)v'_1(t_1) + Gv'_1(t_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(Eu'_2(t_2)^2 + 2Fu'_2(t_2)v'_2(t_2) + Gv'_2(t_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{Eu'_1(t_1)u'_2(t_2) + F(u'_1(t_1)v'_2(t_2) + v'_1(t_1)u'_2(t_2)) + Gv'_1(t_1)v'_2(t_2)}{\left(Eu'_1(t_1)^2 + 2Fu'_1(t_1)v'_1(t_1) + Gv'_1(t_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(Eu'_2(t_2)^2 + 2Fu'_2(t_2)v'_2(t_2) + Gv'_2(t_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

ou, abreviadamente

$$\cos \alpha = \frac{Eu'_1 u'_2 + F(u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + Gv'_1 v'_2}{(Eu_1'^2 + 2F u'_1 v'_1 + G v_1'^2)^{\frac{1}{2}} (Eu_2'^2 + 2F u'_2 v'_2 + G v_2'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.1)$$

Em particular no ponto $q = (u_0, v_0)$, o co-seno do ângulo entre as curvas $u \mapsto \sigma(u, v_0)$ e $v \mapsto \sigma(u_0, v)$ é:

$$\cos \alpha = \frac{\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\| \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\|} = \frac{F(q)}{\sqrt{E(q) \times G(q)}}.$$

Ou seja, estas curvas são ortogonais se e só se $F(q) = 0, \forall q \in U$. Neste caso diz-se que σ é uma parametrização ortogonal.

Exemplos

1) Seja

$$\begin{aligned}
 \sigma :]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\longrightarrow S_*^2 \\
 (\varphi, \theta) &\longmapsto (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).
 \end{aligned}$$

Consideremos, agora, um meridiano de longitude $\tilde{\varphi}$ e um paralelo de latitude $\tilde{\theta}$ parametrizados por:

- $\gamma_1(t) = (\cos \tilde{\varphi} \cos t, \sin \tilde{\varphi} \cos t, \sin t) = \sigma(\tilde{\varphi}, t)$
- $\gamma_2(t) = (\cos \tilde{\theta} \cos t, \cos \tilde{\theta} \sin t, \sin \tilde{\theta}) = \sigma(t, \tilde{\theta})$

Como em qualquer ponto

- $\sigma(\tilde{\varphi}, t_1), \quad u'_1(t_1) = 0 \quad \text{e} \quad v'_1(t_1) = 1$
- $\sigma(t_2, \tilde{\theta}), \quad u'_2(t_2) = 1 \quad \text{e} \quad v'_2(t_2) = 0$

logo, por (4.1) e sabendo que para a parametrização da esfera, dada pelas coordenadas geográficas, $E = \cos^2\theta$, $F = 0$ e $G = 1$, temos

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\cos^2\theta \times 0 \times 1 + 1 \times 1 \times 0}{\sqrt{\cos^2\theta \times 0 + 1 \times 1} \times \sqrt{\cos^2\theta \times 1 + 1 \times 0}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, na esfera os meridianos e paralelos são perpendiculares.

- 2) Vamos determinar, além dos paralelos, curvas que cruzam todos os meridianos terrestres segundo um ângulo constante (β) - as designadas *loxodromias* ou *linhas de rumo*.

Vamos considerar $\beta \in]0, \pi[$.

Seja γ uma tal curva.

Vamos supor que:

- γ é regular, isto é, $\|\gamma'(t)\|$ nunca se anula;
- γ é da forma

$$\gamma(t) = \sigma(\varphi(t), \theta(t)) = (\cos \theta(t) \cos \varphi(t), \cos \theta(t) \sin \varphi(t), \sin \theta(t)).$$

Ou seja, vamos considerar $u_1(t) = \varphi(t)$ e $v_1(t) = \theta(t)$.

Como anteriormente, o meridiano $\varphi = \text{const.}$ é parametrizado por

$$\alpha(t) = \sigma(\varphi, t) = (\cos \varphi \cos t, \sin \varphi \cos t, \sin t).$$

Consideremos $u_2(t) = \varphi$ e $v_2(t) = t$.

Assim, $u'_2(t) = 0$ e $v'_2(t) = 1$.

No ponto $p = \gamma(t)$ o ângulo entre a curva γ e o meridiano que passa por este ponto verifica

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{E \varphi'(t) \times 0 + F \left(\varphi'(t) \times 1 + \theta'(t) \times 0 \right) + G \theta'(t) \times 1}{\sqrt{E \left(\varphi'(t) \right)^2 + 2F \varphi'(t) \theta'(t) + G \left(\theta'(t) \right)^2} \times \sqrt{E \times 0 + 2F \times 0 \times 1 + G \times 1}} \\ &= \frac{\theta'(t)}{\sqrt{\cos^2 \theta(t) \left(\varphi'(t) \right)^2 + \left(\theta'(t) \right)^2}} \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\cos^2 \beta = \frac{(\theta'(t))^2}{\cos^2 \theta(t) \left(\varphi'(t) \right)^2 + \left(\theta'(t) \right)^2}.$$

- Se $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\theta'(t) = 0 \Rightarrow \theta(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, γ é um paralelo.

- Se $\beta \neq \frac{\pi}{2}$

$$- \quad \theta'(t) \neq 0 \quad \forall t;$$

$$\begin{aligned} - \quad & \frac{(\theta'(t))^2}{\cos^2 \beta} = \cos^2 \theta(t) \left(\varphi'(t) \right)^2 + \left(\theta'(t) \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \left(\theta'(t) \right)^2 (1 + \tan^2 \beta) = \cos^2 \theta(t) \left(\varphi'(t) \right)^2 + \left(\theta'(t) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\theta'(t) \right)^2 \tan^2 \beta = \cos^2 \theta(t) \left(\varphi'(t) \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(\varphi'(t) \right)^2}{\tan^2 \beta} = \frac{\left(\theta'(t) \right)^2}{\cos^2 \theta(t)}.$$

Como $\forall t \quad \theta'(t) \neq 0$, a equação permite afirmar que $\forall t \quad \varphi'(t) \neq 0$.

Por outro lado, θ' e φ' são funções contínuas, logo θ' e φ' têm sinal constante.

Deste modo, obtemos as duas equações

$$\frac{\varphi'(t)}{tg\beta} = \frac{\theta'(t)}{\cos\theta(t)} \quad \vee \quad \frac{\varphi'(t)}{tg\beta} = -\frac{\theta'(t)}{\cos\theta(t)}.$$

Como

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1 + tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - tg\left(\frac{x}{2}\right)} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

integrando

$$\frac{\varphi'(t)}{tg\beta} = \pm \frac{\theta'(t)}{\cos\theta(t)}$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{tg\beta} + c_1 &= \pm \ln \left| \frac{1 + tg\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)}{1 - tg\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \right| + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \varphi(t) &= \pm tg\beta \left(\ln \left| \frac{1 + tg\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)}{1 - tg\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \right| + k \right), \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a equação das loxodromias onde a constante k é determinada a partir de um ponto $\sigma(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})$ que pertença à curva.

No mapa de coordenadas geográficas longitude-latitude, (φ, θ) , as loxodromias verificam

$$\begin{aligned} \varphi &= \pm tg\beta \left(\ln \left| \frac{1 + tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - tg\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| + k \right) \\ &= \pm tg\beta \left(\ln \left| tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \right| + k \right), \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

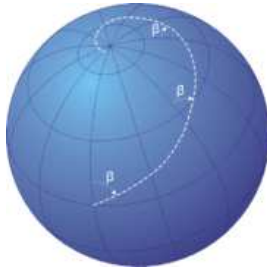


Figura 4.1: Loxodromia no globo terrestre. [42]

4.3 Área de uma Porção de Superfície

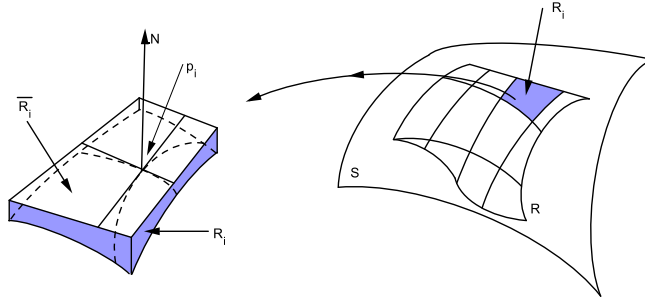
Seja $R \subseteq S$ uma região limitada de uma superfície regular. Vamos supor que $R = \sigma(Q)$, onde $\sigma : U \rightarrow S$ é uma parametrização de S e $Q = \sigma^{-1}(R)$ a aderência de um aberto limitado de \mathbb{R}^2 .

Para definir a área de R vamos começar por considerar uma partição P de R , constituída por um número finito de regiões R_i , isto é, $R = \bigcup_i R_i$ onde a intersecção de duas quaisquer regiões é vazia ou é constituída por pontos da fronteira de ambas.

Dada uma partição de R , se escolhermos arbitrariamente um ponto p_i em cada região R_i e projectarmos R_i sobre o plano tangente à superfície no ponto p_i na direcção do vector normal em p_i , representando esta projecção por \overline{R}_i e a sua área por $A(\overline{R}_i)$, a soma

$$S = \sum_i A(\overline{R}_i)$$

é, intuitivamente, uma aproximação da área da região R e uma aproximação tanto melhor quanto mais “fina” for a partição.



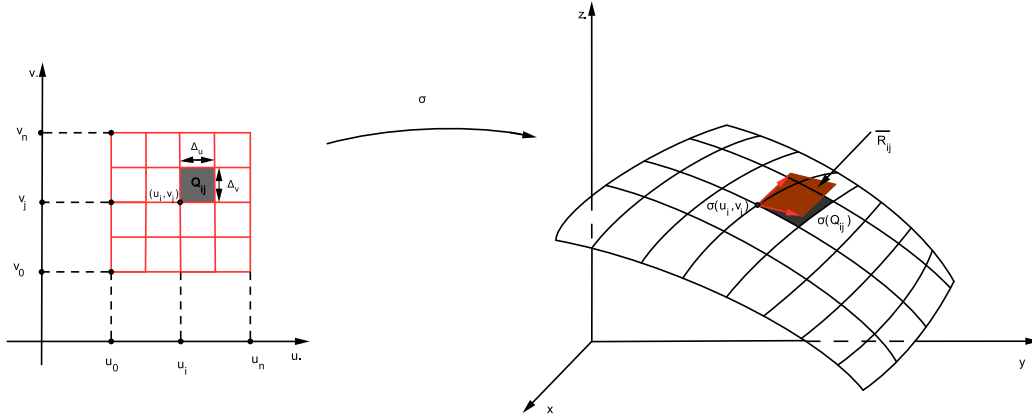
Vamos, agora, obter a expressão da área da região R em termos da parametrização σ .

Para simplificar, vamos supor que $Q = \sigma^{-1}(R)$ é um rectângulo.

Seja Q_n uma partição de Q ; Q_{ij} o ij -ésimo rectângulo dessa partição, com vértices (u_i, v_j) , (u_{i+1}, v_j) , (u_i, v_{j+1}) e (u_{i+1}, v_{j+1}) , $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq n-1$.

A porção $R_{ij} = \sigma(Q_{ij})$ da superfície S tem o ponto $P_{ij} = \sigma(u_i, v_j)$.

Sejam $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j)$ os vectores tangentes a S em P_{ij} . Se projectarmos os vectores $\Delta u \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j)$ e $\Delta v \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j)$ sobre o plano tangente à superfície no ponto



$\sigma(u_i, v_j)$, onde $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ e $\Delta v = v_{j+1} - v_j$, estes vectores formam um paralelogramo, \overline{R}_{ij} , cuja área é dada por

$$A(\overline{R}_{ij}) = \left\| \Delta u \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \Delta v \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u \Delta v.$$

Para $n \rightarrow +\infty$, a área de \overline{R}_{ij} é uma boa aproximação da área $\sigma(Q_{ij})$.

Assim, uma aproximação da área da região R é dada por

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A(\overline{R}_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u \Delta v.$$

Para $n \rightarrow +\infty$, esta soma converge para o integral

$$\iint_Q \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

que é independente da escolha da parametrização.

Definição 11. *Sejam $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e $R = \sigma(Q)$ uma região de S , onde $Q \subset U$ é a aderência de um aberto limitado. A área da região $R \subseteq S$ é dada por*

$$A(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

Proposição 9. *Seja $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície regular S .*

Temos que

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = EG - F^2$$

e, em particular, $EG - F^2 > 0$.

Demonstração. Sabemos que

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right), \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) \right\rangle.$$

Utilizando a igualdade de Lagrange

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (\langle x, y \rangle)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^3$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = \\ &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \right\rangle \times \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\rangle - \left(\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\rangle \right)^2 \\ &= E \times G - F^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela terceira condição da Definição 1,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0)$$

pelo que

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 > 0.$$

□

Da proposição anterior,

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = EG - F^2 > 0.$$

Donde resulta que

$$A(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Assim, o conceito de área depende apenas do conhecimento da primeira forma fundamental.

4.4 Isometrias, Mapas Conformais e Equiareais

Definição 12. Um difeomorfismo $f : S_1 \longrightarrow S_2$ é uma **isometria** se, para cada curva γ em S_1 , a curva $f \circ \gamma$ em S_2 tem comprimento igual ao de γ . Se existir uma isometria $f : S_1 \longrightarrow S_2$, diz-se que S_1 e S_2 são *superfícies isométricas*.

Teorema 5. Um difeomorfismo $f : S_1 \longrightarrow S_2$ é uma isometria se e só se, para cada parametrização σ_1 de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e $f \circ \sigma_1$ forem idênticas.

Demonstração. Como o comprimento de uma curva em S pode ser calculado como a soma dos comprimentos dos arcos de curva em que cada um é descrito por uma única parametrização de S , pode-se admitir que S_1 e S_2 estão descritas por uma parametrização global.

Sejam $\sigma_1 : U \longrightarrow S_1$ uma parametrização global de S_1 , $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \longrightarrow S_2$ uma parametrização global de S_2 , E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e σ_2 , respectivamente.

⇐

Se $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$ e $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ define uma curva arbitrária em S_1 , o comprimento de γ de $\gamma(t_0)$ até $\gamma(t_1)$, isto é,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1(\gamma(t)) \left(u'(t)\right)^2 + 2F_1(\gamma(t)) u'(t) v'(t) + G_1(\gamma(t)) \left(v'(t)\right)^2} \, dt$$

ou abreviado:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1 u'(t)^2 + 2 F_1 u'(t) v'(t) + G_1 v'(t)^2} dt$$

é igual ao comprimento da curva

$$\sigma_2(u(t), v(t)) = f \circ \sigma_1(u(t), v(t)) = f \circ \gamma(t), \text{ de } f(\gamma(t_0)) \text{ a } f(\gamma(t_1)).$$

\implies

Se f é uma isometria, então qualquer que seja a curva $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ em S_1 com $t \in [\alpha, \beta]$, a curva $f \circ \gamma_1(t) = \sigma_2(u(t), v(t))$ tem o mesmo comprimento. Portanto,

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1 u'(t)^2 + 2 F_1 u'(t) v'(t) + G_1 v'(t)^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_2 u'(t)^2 + 2 F_2 u'(t) v'(t) + G_2 v'(t)^2} dt$$

$$\forall t_0, t_1 \in [\alpha, \beta].$$

Fixando t_0 , $\forall t_1 \in [\alpha, \beta]$, se $A(t_1) = B(t_1)$

onde

$$A(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1 u'(t)^2 + 2 F_1 u'(t) v'(t) + G_1 v'(t)^2} dt$$

e

$$B(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_2 u'(t)^2 + 2 F_2 u'(t) v'(t) + G_2 v'(t)^2} dt$$

então

$$A'(t_1) = B'(t_1).$$

Ou seja,

$$E_1 u'(t)^2 + 2 F_1 u'(t) v'(t) + G_1 v'(t)^2 = E_2 u'(t)^2 + 2 F_2 u'(t) v'(t) + G_2 v'(t)^2 \quad (4.2)$$

$$\forall t \in [\alpha, \beta].$$

Fixemos $t_0 \in [\alpha, \beta]$ e sejam $u_0 = u(t_0)$ e $v_0 = v(t_0)$.

Então

- existe um subintervalo J de $[\alpha, \beta]$ contendo t_0 tal que para cada $t \in J$, $[u_0 + t - t_0, v_0] \in U$. Logo, $\gamma_1(t) = \sigma_1(u_0 + t - t_0, v_0)$ define uma curva $\gamma_1 : J \rightarrow S_1$.

Para esta curva particular, e de acordo com a igualdade (4.2), $E_1 = E_2$, pois neste caso $u'(t) = 1$ e $v'(t) = 0$.

- Do mesmo modo, pode-se considerar a curva γ_2 definida por

$$\gamma_2(t) = \sigma_1(u_0, v_0 + t - t_0).$$

Neste caso $u'(t) = 0$ e $v'(t) = 1$ e pela igualdade (4.2), $G_1 = G_2$.

- considerando a curva γ_3 dada por $\gamma_3(t) = \sigma_1(u_0 + t - t_0, v_0 + t - t_0)$, pode-se concluir que $E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2$, pelo que $F_1 = F_2$.

□

Definição 13. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz-se **conformal** se, para quaisquer curvas regulares γ_1 e γ_2 em S_1 que se intersectam, o ângulo de intersecção das curvas $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$ em S_2 é igual ao ângulo de intersecção de γ_1 e γ_2 .

Teorema 6. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é conformal se e só se, para cada parametrização σ_1 de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e $f \circ \sigma_1$ forem proporcionais, ou seja,

$$E_2 = \lambda E_1, F_2 = \lambda F_1 \text{ e } G_2 = \lambda G_1, \text{ para alguma função suave } \lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Demonstração. Tal como na demonstração do Teorema anterior, pode-se supor que S_1 e S_2 estão descritas por uma parametrização global.

Sejam $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$ uma parametrização global de S_1 , $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \rightarrow S_2$ uma parametrização global de S_2 , E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e σ_2 , respectivamente.

⇐

Se

$$E_2 = \lambda E_1, F_2 = \lambda F_1 \text{ e } G_2 = \lambda G_1$$

então

$$E_2 u'(t)^2 + 2 F_2 u'(t) v'(t) + G_2 v'(t)^2 = \lambda \left(E_1 u'(t)^2 + 2 F_1 u'(t) v'(t) + G_1 v'(t)^2 \right)$$

para alguma função suave $\lambda(u, v)$.

Quaisquer que sejam as curvas $\gamma_1(t) = \sigma_1(u_1(t), v_1(t))$ e $\gamma_2(t) = \sigma_1(u_2(t), v_2(t))$ na superfície S_1 , f transforma γ_1 e γ_2 nas curvas $\beta_1(t) = \sigma_2(u_1(t), v_1(t))$ e $\beta_2(t) = \sigma_2(u_2(t), v_2(t))$ na superfície S_2 , respectivamente.

O ângulo de intersecção das curvas $\beta_1(t)$ e $\beta_2(t)$, no ponto p , é igual ao ângulo α entre $\beta'_1(t_1)$ e $\beta'_2(t_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle \beta'_1(t_1), \beta'_2(t_2) \rangle}{\|\beta'_1(t_1)\| \|\beta'_2(t_2)\|} \\ &= \frac{E_2 u'_1(t_1) u'_2(t_2) + F_2 (u'_1(t_1) v'_2(t_2) + v'_1(t_1) u'_2(t_2)) + G_2 v'_1(t_1) v'_2(t_2)}{\left(E_2 u'^2_1(t_1) + 2 F_2 u'_1(t_1) v'_1(t_1) + G_2 v'^2_1(t_1) \right)^{\frac{1}{2}} \left(E_2 u'^2_2(t_2) + 2 F_2 u'_2(t_2) v'_2(t_2) + G_2 v'^2_2(t_2) \right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

ou, abreviadamente,

$$\cos \alpha = \frac{E_2 u'_1 u'_2 + F_2 (u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + G_2 v'_1 v'_2}{(E_2 u'^2_1 + 2 F_2 u'_1 v'_1 + G_2 v'^2_1)^{\frac{1}{2}} (E_2 u'^2_2 + 2 F_2 u'_2 v'_2 + G_2 v'^2_2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mas, por hipótese

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\lambda E_1 u'_1 u'_2 + \lambda F_1 (u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + \lambda G_1 v'_1 v'_2}{(\lambda E_1 u'^2_1 + 2 \lambda F_1 u'_1 v'_1 + \lambda G_1 v'^2_1)^{\frac{1}{2}} (\lambda E_1 u'^2_2 + 2 \lambda F_1 u'_2 v'_2 + \lambda G_1 v'^2_2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\lambda (E_1 u'_1 u'_2 + F_1 (u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + G_1 v'_1 v'_2)}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{\lambda} (E_1 u'^2_1 + 2 F_1 u'_1 v'_1 + G_1 v'^2_1)^{\frac{1}{2}} (E_1 u'^2_2 + 2 F_1 u'_2 v'_2 + G_1 v'^2_2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{E_1 u'_1 u'_2 + F_1 (u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + G_1 v'_1 v'_2}{(E_1 u'^2_1 + 2 F_1 u'_1 v'_1 + G_1 v'^2_1)^{\frac{1}{2}} (E_1 u'^2_2 + 2 F_1 u'_2 v'_2 + G_1 v'^2_2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Assim, f é conformal.

\implies

Pretende-se demonstrar que se

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 u'_1 u'_2 + F_1 (u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + G_1 v'_1 v'_2}{(E_1 u'^2_1 + 2 F_1 u'_1 v'_1 + G_1 v'^2_1)^{\frac{1}{2}} (E_1 u'^2_2 + 2 F_1 u'_2 v'_2 + G_1 v'^2_2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{E_2 u'_1 u'_2 + F_2 (u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + G_2 v'_1 v'_2}{(E_2 u'^2_1 + 2 F_2 u'_1 v'_1 + G_2 v'^2_1)^{\frac{1}{2}} (E_2 u'^2_2 + 2 F_2 u'_2 v'_2 + G_2 v'^2_2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

para todos os pontos de intersecção das curvas $\gamma_1(t) = \sigma_1(u_1(t), v_1(t))$ e $\gamma_2(t) = \sigma_1(u_2(t), v_2(t))$ na superfície S_1 , então $E_2 = \lambda E_1$, $F_2 = \lambda F_1$ e $G_2 = \lambda G_1$, onde λ é uma função suave $U \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Fixemos $(a, b) \in U$ e sejam as curvas $\gamma_1(t) = \sigma_1(a + t, b)$ e $\gamma_2(t) = \sigma_1(a + t \cos \phi, b + t \sin \phi)$, onde ϕ é uma constante. Estas duas curvas intersectam-se em $\sigma_1(a, b)$ quando $t = 0$.

Assim, temos que $u'_1 = 1$, $v'_1 = 0$, $u'_2 = \cos \phi$ e $v'_2 = \sin \phi$.

Substituindo na equação (4.3), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi}{\sqrt{E_1} \cdot \sqrt{E_1 \cos^2 \phi + 2 F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi}} \\ &= \frac{E_2 \cos \phi + F_2 \sin \phi}{\sqrt{E_2} \cdot \sqrt{E_2 \cos^2 \phi + 2 F_2 \sin \phi \cos \phi + G_2 \sin^2 \phi}} \\ & \frac{E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi}{\sqrt{E_1} \cdot (E_1 \cos^2 \phi + 2 F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi)} \\ &= \frac{E_2 \cos \phi + F_2 \sin \phi}{\sqrt{E_2} (E_2 \cos^2 \phi + 2 F_2 \sin \phi \cos \phi + G_2 \sin^2 \phi)} \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado

$$\begin{aligned} & \frac{(E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi)^2}{E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2 F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi)} \\ &= \frac{(E_2 \cos \phi + F_2 \sin \phi)^2}{E_2 (E_2 \cos^2 \phi + 2 F_2 \sin \phi \cos \phi + G_2 \sin^2 \phi)}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 (E_1 \cos \phi + F_1 \operatorname{sen} \phi)^2 &= \\
 &= E_1^2 \cos^2 \phi + 2 E_1 F_1 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + E_1 G_1 \operatorname{sen}^2 \phi - E_1 G_1 \operatorname{sen}^2 \phi + F_1^2 \operatorname{sen}^2 \phi \\
 &= E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2 F_1 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + G_1 \operatorname{sen}^2 \phi) - (E_1 G_1 - F_1^2) \operatorname{sen}^2 \phi
 \end{aligned}$$

substituindo os numeradores e simplificando, obtém-se

$$\begin{aligned}
 &\frac{(E_1 G_1 - F_1^2) \operatorname{sen}^2 \phi}{E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2 F_1 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + G_1 \operatorname{sen}^2 \phi)} \\
 &= \frac{(E_2 G_2 - F_2^2) \operatorname{sen}^2 \phi}{E_2 (E_2 \cos^2 \phi + 2 F_2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + G_2 \operatorname{sen}^2 \phi)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow (E_1 G_1 - F_1^2) E_2 (E_2 \cos^2 \phi + 2 F_2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + G_2 \operatorname{sen}^2 \phi) \\
 = (E_2 G_2 - F_2^2) E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2 F_1 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + G_1 \operatorname{sen}^2 \phi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow (E_2 \cos^2 \phi + 2 F_2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + G_2 \operatorname{sen}^2 \phi) \\
 = \frac{(E_2 G_2 - F_2^2) E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2 F_1 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + G_1 \operatorname{sen}^2 \phi)}{(E_1 G_1 - F_1^2) E_2}.
 \end{aligned}$$

Considerando

$$\lambda = \frac{(E_2 G_2 - F_2^2) E_1}{(E_1 G_1 - F_1^2) E_2}.$$

Pela Proposição 9, $\lambda > 0$. Como as funções E_1, F_1, G_1, E_2, F_2 e G_2 são suaves, λ é suave.

Substituindo, obtém-se

$$\begin{aligned}
 E_2 \cos^2 \phi + 2 F_2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + G_2 \operatorname{sen}^2 \phi &= \lambda (E_1 \cos^2 \phi + 2 F_1 \operatorname{sen} \phi \cos \phi + G_1 \operatorname{sen}^2 \phi) \\
 \Leftrightarrow (E_2 - \lambda E_1) \cos^2 \phi + 2 (F_2 - \lambda F_1) \operatorname{sen} \phi \cos \phi + (G_2 - \lambda G_1) \operatorname{sen}^2 \phi &= 0. \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Para

$$\bullet \phi = 0$$

$$E_2 - \lambda E_1 = 0 \Leftrightarrow E_2 = \lambda E_1.$$

$$\bullet \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$G_2 - \lambda G_1 = 0 \Leftrightarrow G_2 = \lambda G_1.$$

Substituindo $E_2 = \lambda E_1$ e $G_2 = \lambda G_1$ na equação (4.4), obtém-se:

$$2(F_2 - \lambda F_1) \operatorname{sen} \phi \cos \phi = 0.$$

$$\text{Para } \phi = \frac{\pi}{4}$$

$$2(F_2 - \lambda F_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$F_2 - \lambda F_1 = 0$$

$$F_2 = \lambda F_1.$$

□

Definição 14. Um difeomorfismo $f : S_1 \longrightarrow S_2$ diz-se **equiareal** se aplica cada região de S_1 numa região de S_2 com igual área.

Teorema 7. Um difeomorfismo $f : S_1 \longrightarrow S_2$ é equiareal se e só se, para cada parametrização σ_1 de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e de $\sigma_2 = f \circ \sigma_1$ satisfazem

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2.$$

Demonstração. Como a área de uma região em S pode ser calculada como uma soma de áreas de subregiões, em que cada subregião é descrita por uma única parametrização de S , pode-se admitir, por isso, que S_1 e S_2 estão descritas por uma parametrização global.

Sejam então $\sigma_1 : U \longrightarrow S_1$ uma parametrização global de S_1 , $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \longrightarrow S_2$ uma parametrização global de S_2 , E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 as primeiras formas fundamentais de σ_1 e σ_2 , respectivamente. Um difeomorfismo $f : S_1 \longrightarrow S_2$ é equiareal se e só se, para cada região R de S_1

$$\iint_{\sigma_1^{-1}(R)} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, dx \, dy = \iint_{(f \circ \sigma_1)^{-1}(f(R))} \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} \, dx \, dy$$

ou seja,

$$\iint_{\sigma_1^{-1}(R)} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, dx \, dy = \iint_{\sigma_1^{-1}(R)} \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} \, dx \, dy.$$

Pelo Lema 1, a seguir enunciado e demonstrado

$$\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2}$$

logo

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2. \quad \square$$

Lema 1. *Sejam $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tal que $\forall D \subset U$, D aderência de um aberto limitado de \mathbb{R}^2 .*

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D g(x, y) \, dx \, dy. \text{ Então } f(x, y) = g(x, y).$$

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que $f(x, y) \neq g(x, y)$.

Então existe um ponto (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) \neq g(x_0, y_0)$.

Ou seja, $f(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) \neq 0$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) > 0$.

Como as funções f e g são contínuas, existe uma vizinhança aberta V de (x_0, y_0) tal que $f(x, y) - g(x, y) > 0, \forall (x, y) \in V$.

Logo, para $D = \overline{V}$,

$$\iint_D (f - g)(x, y) \, dx \, dy > 0.$$

Ou seja,

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \neq \iint_D g(x, y) \, dx \, dy$$

o que é absurdo, porque por hipótese $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D g(x, y) \, dx \, dy$.

Assim, concluímos que $\forall D \subset U$

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D g(x, y) \, dx \, dy \Rightarrow f(x, y) = g(x, y)$$

\square

Capítulo 5

Aplicação de Gauss, Curvatura e Teorema *Egregium de Gauss*

A geometria intrínseca de uma superfície refere-se àqueles conceitos e propriedades que dependem só de medições feitas na superfície, sem relação com o modo como ela está mergulhada no espaço tridimensional. Um método, aqui utilizado, para estabelecer o carácter intrínseco de um certo conceito/propriedade consiste em mostrar que ele é função apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental e das suas derivadas.

Este capítulo inicia com o estudo da Aplicação de Gauss, instrumento fundamental para o estudo das propriedades invariantes por isometria. Posteriormente, introduz-se uma maneira de medir a *curvatura* de uma superfície. O capítulo termina com a prova do Teorema *Egregium de Gauss*, um dos teoremas mais importantes do século XIX. Este teorema mostra que a curvatura de Gauss é um conceito intrínseco de uma superfície.

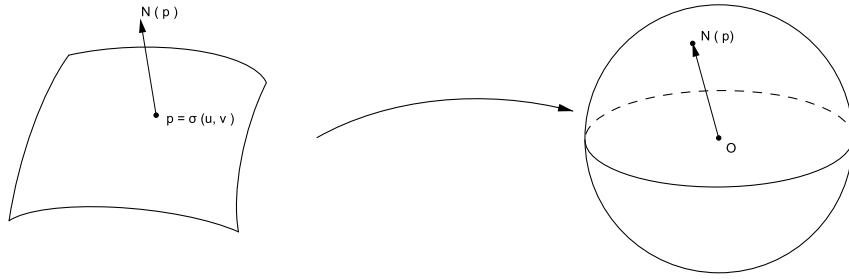
Para demonstrar este resultado clássico, é necessário introduzir os chamados símbolos de Christoffel - símbolos que apenas dependem dos coeficientes da primeira forma fundamental e das suas derivadas.

O conteúdo deste capítulo baseia-se essencialmente nas referências bibliográficas [2], [16] e [18].

5.1 Aplicação de Gauss e suas Propriedades

Se pretendermos efectuar um estudo sobre a variação do plano tangente numa vizinhança de um ponto p de uma superfície S , isto equivale a estudar a “velocidade” com que a direcção de um vector normal e unitário (N) a S em p varia numa vizinhança de p .

Para formalizar esta ideia notemos que $N(p)$, em cada ponto p de S , é um ponto da esfera de raio unitário. Então, podemos considerar a aplicação $S \rightarrow S^2$ que a cada ponto p faz corresponder o ponto $N(p)$ de S^2 .



Recordemos que, quando existe tal aplicação

$$\begin{aligned} N : S &\longrightarrow S^2 \\ p &\longmapsto N(p) \end{aligned}$$

que tem a propriedade de ser suave, a superfície S diz-se orientável¹.

A aplicação N tem a designação de orientação ou **Aplicação de Gauss**.

Esta aplicação é um instrumento fundamental para o estudo das propriedades das superfícies invariantes por isometria. A ideia fundamental de Gauss (1777-1855) foi comparar uma superfície qualquer com a de uma esfera, a qual era bem conhecida na época.

Lema 2. *Seja S uma superfície regular. Para todo o $p \in S$, temos que*

$$dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S.$$

¹A partir de agora, salvo menção em contrário, quando usarmos a palavra “superfície” estaremos a referir-nos a superfícies regulares orientáveis.

Demonstração. Sendo N uma aplicação suave de S em S^2 , pelo Teorema 4, a derivada de N no ponto p é uma aplicação linear definida em $T_p S$ com valores em $T_{N(p)} S^2$.

Mas

$$\begin{aligned} T_{N(p)} S^2 &= \{u \in \mathbb{R}^3 : \langle u, N(p) \rangle = 0\} \\ &= T_p S. \end{aligned}$$

Portanto,

$$dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S.$$

□

Proposição 10. $\forall p \in S$, $dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S$ é uma aplicação simétrica, isto é,

$$\langle dN_p(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, dN_p(v_2) \rangle, \forall v_1, v_2 \in T_p S.$$

Demonstração. Seja $\sigma : U \longrightarrow S$ uma parametrização de S contendo $p = \sigma(q)$.

Pela Proposição 7, sabemos que $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\}$ é uma base de $T_p S$.

Pelo Teorema 4,

$$\begin{cases} dN_p\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q)\right) &= \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q) \\ dN_p\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(q)\right) &= \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q). \end{cases}$$

onde $\bar{N} = N \circ \sigma$.

Ou seja, para demonstrar que a aplicação linear dN_p é simétrica basta mostrar que

$$\left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q) \right\rangle.$$

Para qualquer $(u, v) = q \in U$, $\bar{N}(q)$ é normal a S em $\sigma(q)$.

Logo $\bar{N}(q)$ é ortogonal a $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(q)$.

Assim,

$$\bullet \left\langle \overline{N}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle = 0 \quad (5.1)$$

$$\bullet \left\langle \overline{N}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle = 0 \quad (5.2)$$

Derivando (5.1) e (5.2) em ordem a v e u , respectivamente, obtém-se

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \overline{N}}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle + \left\langle \overline{N}(q), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}(q) \right\rangle = 0 \\ \left\langle \frac{\partial \overline{N}}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle + \left\langle \overline{N}(q), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v \partial u}(q) \right\rangle = 0. \end{cases}$$

Como

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v \partial u}, \text{ pois } \sigma \text{ é de classe } C^\infty$$

tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \overline{N}}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle &= - \left\langle \overline{N}(q), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}(q) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \overline{N}}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \overline{N}}{\partial v}(q) \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Recordando os seguintes resultados da Álgebra Linear:

Teorema 8. *Seja E um espaço euclidiano de dimensão n e $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear simétrica. Então, existe uma base ortonormada de E constituída por vectores próprios de f . Em particular, f admite n valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, não necessariamente distintos e o determinante de f é igual $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n$.*

Podemos, assim, concluir que existe uma base ortonormada de $T_p S$ formada por vectores próprios, e_1 e e_2 , de dN_p . Sejam k_1 e k_2 os valores próprios de dN_p associados aos vectores próprios e_1 e e_2 ($dN_p(e_1) = k_1 e_1$ e $dN_p(e_2) = k_2 e_2$).

Definição 15. Sejam S uma superfície regular; $p \in S$; N uma aplicação de Gauss de S ; k_1 e k_2 os valores próprios de dN_p . Chama-se **curvatura de Gauss** de S no ponto p ao número real

$$\begin{aligned} k(p) &= k_1 \times k_2 \\ &= \det(dN_p). \end{aligned}$$

Nota: Uma superfície S conexa orientável tem exactamente duas orientações distintas (N e $-N$) e para qualquer ponto $p \in S$, $k(p) = \det(dN_p) = \det(-dN_p)$.

5.2 Segunda Forma Fundamental

Definição 16. Seja S uma superfície regular, $N : S \rightarrow S^2$ uma aplicação de Gauss e $p \in S$.

A aplicação

$$\begin{aligned} II_p : T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto -\langle dN_p(w), w \rangle \end{aligned}$$

é chamada a **segunda forma fundamental** de S no ponto p .

Seja $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície S tal que $p = \sigma(q)$, $q \in U$.

Consideremos ainda

$$w = a \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + b \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \in T_p S$$

e

$$\begin{aligned} \beta :]-\epsilon, \epsilon[&\rightarrow \sigma(U) \\ t &\mapsto \beta(t) = \sigma(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

uma curva regular tal que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = w$.

Como $w = \beta'(0)$, temos

$$a \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + b \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) = u'(0) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + v'(0) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q)$$

ou seja,

$$a = u'(0) \quad e \quad b = v'(0).$$

Por outro lado,

$$N(\sigma(u, v)) = \bar{N}(u, v)$$

logo

$$dN_p(w) = (N \circ \beta)'(0) = \frac{d}{dt} N(\sigma(u(t), v(t)))|_{t=0} = u'(0) \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q) + v'(0) \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q).$$

Assim, uma expressão para $II_p(\beta'(0))$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\beta'(0)) &= -\langle (N \circ \beta)'(0), \beta'(0) \rangle \\ &= -\left\langle u'(0) \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q) + v'(0) \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q), u'(0) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + v'(0) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle \\ &= \left(u'(0)\right)^2 e(q) + 2u'(0)v'(0)f(q) + \left(v'(0)\right)^2 g(q) \end{aligned}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} e(q) = -\left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle = \left\langle \bar{N}(q), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}(q) \right\rangle \\ f(q) = -\left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle = \left\langle \bar{N}(q), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}(q) \right\rangle \\ g(q) = -\left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle = \left\langle \bar{N}(q), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2}(q) \right\rangle \end{array} \right. \quad (5.3)$$

são os chamados **coeficientes da segunda forma fundamental** para a parametrização σ .

Finalmente, se

$$w = a \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + b \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \in T_p S$$

então

$$\begin{aligned} II_p(w) &= a^2 e(q) + 2abf(q) + b^2 g(q) \\ &= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Proposição 11. A matriz da aplicação $dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S$ em relação à base

$$\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\} \text{ é igual a}$$

$$[dN_p] = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} fF - eG & gF - fG \\ eF - fE & fF - gE \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Demonstração. Como

$$\langle \bar{N}(u, v), \bar{N}(u, v) \rangle = 1$$

derivando em ordem a u , obtém-se

$$\left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q), \bar{N}(q) \right\rangle + \left\langle \bar{N}(q), \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q) \right\rangle = 0$$

ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q), \bar{N}(q) \right\rangle = 0$$

pelo que

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q) \in T_p S.$$

De modo análogo, $\frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q) \in T_p S$.

Assim, sabemos que

- $\frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q)$ e $\frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q)$ são vectores de $T_p S$.
- $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(q)$ formam uma base de $T_p S$.

Logo, existem reais únicos a_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$, tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q) = a_{11} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + a_{12} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q) = a_{21} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + a_{22} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \end{cases} \quad (5.4)$$

Considerando novamente um vector $w = \beta'(0)$ de $T_p S$, onde $\beta(t) = \sigma(u(t), v(t))$ e $\beta(0) = p = \sigma(q)$, temos

$$\begin{aligned} dN_p(\beta'(0)) &= u'(0) \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q) + v'(0) \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q) \\ &= u'(0) \left(a_{11} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + a_{12} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right) + v'(0) \left(a_{21} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + a_{22} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right) \\ &= \left(a_{11} u'(0) + a_{21} v'(0) \right) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + \left(a_{12} u'(0) + a_{22} v'(0) \right) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q). \end{aligned}$$

Portanto, na base $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\}$

$$\begin{bmatrix} dN_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a matriz de dN_p na base $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\}$ é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Vamos agora exprimir os a_{ij} em função dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental.

De (5.3) e (5.4), obtemos as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} -f(q) = \left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle = \left\langle a_{11} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + a_{12} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle \\ \\ = a_{11} F(q) + a_{12} G(q) \\ \\ -f(q) = \left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle = \left\langle a_{21} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + a_{22} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle \\ \\ = a_{21} E(q) + a_{22} F(q) \\ \\ -e(q) = \left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle = \left\langle a_{11} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + a_{12} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \right\rangle \\ \\ = a_{11} E(q) + a_{12} F(q) \\ \\ -g(q) = \left\langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle = \left\langle a_{21} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) + a_{22} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \right\rangle \\ \\ = a_{21} F(q) + a_{22} G(q) \end{array} \right.$$

Estas relações podem ser expressas sob a forma matricial:

$$-\begin{bmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A matriz de dN_p é a transposta de $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} k(p) = \det([a_{ij}]) &= \left(\frac{1}{EG - F^2} \right)^2 \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G & -F \\ -F & E \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (eg - f^2)(EG - F^2) \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

□

Exemplos

1) Para a parametrização da esfera em termos da latitude e longitude

$$\sigma(\varphi, \theta) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$$

temos

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2}(\varphi, \theta) &= (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, 0) \\ \bullet \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2}(\varphi, \theta) &= (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) \\ \bullet \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi \partial \theta}(\varphi, \theta) &= (r \sin \theta \sin \varphi, -r \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overline{N}(\varphi, \theta) &= \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\varphi, \theta)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \right\|} \\ &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad e(\varphi, \theta) &= \left\langle \overline{N}(\varphi, \theta), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2}(\varphi, \theta) \right\rangle \\ &= \langle (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta), (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, 0) \rangle \\ &= -r \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - r \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + 0 \\ &= -r \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= -r \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(\varphi, \theta) &= \left\langle \overline{N}(\varphi, \theta), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi \partial \theta}(\varphi, \theta) \right\rangle \\ &= \langle (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta), (r \sin \theta \sin \varphi, -r \sin \theta \cos \varphi, 0) \rangle \\ &= r \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi - r \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad g(\varphi, \theta) = \left\langle \overline{N}(\varphi, \theta), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2}(\varphi, \theta) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta), (-r \cos\theta \cos\varphi, -r \cos\theta \sin\varphi, -r \sin\theta) \rangle \\
&= -r \cos^2\theta \cos^2\varphi - r \cos^2\theta \sin^2\varphi - r \sin^2\theta \\
&= -r \cos^2\theta - r \sin^2\theta \\
&= -r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet k(\varphi, \theta) &= \frac{e g - f^2}{E G - F^2} \\
&= \frac{-r \cos^2\theta \times (-r)}{r^2 \cos^2\theta \times r^2} \\
&= \frac{1}{r^2} > 0.
\end{aligned}$$

2) Para o plano parametrizado por: $\psi(u, v) = P + ux + vy \quad u, v \in \mathbb{R};$
 $x, y \in \mathbb{R}^3; \|x\| = \|y\| = 1; \langle x, y \rangle = 0$

temos

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) &= x \\
\bullet \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) &= y \\
\bullet \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 u}(u, v) &= 0 \\
\bullet \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 v}(u, v) &= 0 \\
\bullet \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}(u, v) &= 0 \\
\bullet e(u, v) = f(u, v) = g(u, v) &= 0
\end{aligned}$$

Assim,

$$k(u, v) = 0.$$

5.3 Símbolos de Christoffel

Seja $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície S .

Como $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ e \bar{N} são linearmente independentes, $\{\sigma_u, \sigma_v, \bar{N}\}^2$ forma uma base de \mathbb{R}^3 para cada ponto $p = \sigma(q)$ da superfície S .

Deste modo, existem funções Γ_{jk}^i , $i, j, k = 1, 2$, L_1, L_2, \bar{L}_2, L_3 tais que

$$\begin{aligned}\sigma_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + L_1 \bar{N} \\ \sigma_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + L_2 \bar{N} \\ \sigma_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \sigma_u + \Gamma_{21}^2 \sigma_v + \bar{L}_2 \bar{N} \\ \sigma_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + L_3 \bar{N}.\end{aligned}$$

As funções Γ_{jk}^i dizem-se os **símbolos de Christoffel** da superfície S relativamente à parametrização σ . Estes símbolos são um instrumento fundamental para demonstrar o *Teorema Egregium de Gauss*.

Temos

$$\begin{aligned}e &= \langle \sigma_{uu}, \bar{N} \rangle \\ &= \langle \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + L_1 \bar{N}, \bar{N} \rangle \\ &= \langle \Gamma_{11}^1 \sigma_u, \bar{N} \rangle + \langle \Gamma_{11}^2 \sigma_v, \bar{N} \rangle + \langle L_1 \bar{N}, \bar{N} \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 \langle \sigma_u, \bar{N} \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \sigma_v, \bar{N} \rangle + L_1 \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 \times 0 + \Gamma_{11}^2 \times 0 + L_1 \times 1 \\ &= L_1\end{aligned}\tag{5.6}$$

ou seja,

$$L_1 = \langle \sigma_{uu}, \bar{N} \rangle = e$$

De modo análogo, obtém-se

$$\bullet L_2 = \langle \sigma_{uv}, \bar{N} \rangle = f\tag{5.7}$$

$$\bullet \bar{L}_2 = L_2 = f\tag{5.8}$$

$$\bullet L_3 = \langle \sigma_{vv}, \bar{N} \rangle = g.\tag{5.9}$$

²Para minimizar a extensão das fórmulas, usaremos as notações $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \sigma_u$, $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \sigma_v$ e, assim, sucessivamente.

Como $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$, temos

$$\Gamma_{12}^i = \Gamma_{21}^i, \quad i = 1, 2.$$

Lema 3. *Os símbolos de Christoffel de uma superfície S relativamente a uma parametrização σ estão relacionados com a primeira forma fundamental pelas seguintes igualdades:*

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{(E G - F^2)_u}{2(E G - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 = \frac{(E G - F^2)_v}{2(E G - F^2)} \end{cases}$$

Demonstração. .

$$\bullet \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \Gamma_{11}^1 \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle$$

$$= \langle \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v, \sigma_u \rangle.$$

Como

$$\langle \overline{N}, \sigma_u \rangle = 0$$

então

$$\begin{aligned}\langle \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v, \sigma_u \rangle &= \langle \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + L_1 \overline{N}, \sigma_u \rangle \\ &= \langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle.\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\|\sigma_u\|^2 = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle &= \langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle + \langle \sigma_u, \sigma_{uu} \rangle \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial u} \|\sigma_u\|^2 &= 2 \times \langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle \\ \Leftrightarrow \langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle &= \frac{1}{2} \times \frac{\partial}{\partial u} \|\sigma_u\|^2 \\ \Leftrightarrow \langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle &= \frac{1}{2} E_u.\end{aligned}$$

Assim,

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u.$$

$$\begin{aligned}\bullet \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \Gamma_{11}^1 \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle \\ &= \langle \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v, \sigma_v \rangle \\ &= \langle \sigma_{uv}, \sigma_v \rangle\end{aligned}$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = \langle \sigma_{uu}, \sigma_v \rangle + \langle \sigma_u, \sigma_{uv} \rangle$$

logo

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{uv}, \sigma_v \rangle &= \frac{\partial}{\partial u} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle - \langle \sigma_u, \sigma_{uv} \rangle \\ &= F_u - \frac{1}{2} E_v.\end{aligned}$$

De modo análogo, se provam as quatro igualdades seguintes.

As duas últimas são consequência das anteriores. Vamos provar a primeira, a outra prova-se de forma análoga.

$$\begin{aligned}
(E G - F^2)_u &= \frac{\partial}{\partial u} (E G - F^2) \\
&= E G_u + E_u G - 2 F F_u
\end{aligned}$$

Pelas primeiras quatro igualdades do Lema, obtém-se

$$\begin{aligned}
(E G - F^2)_u &= \\
&= 2 E (\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G) + 2 G (\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F) - 2 F (\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G + \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F) \\
&= 2 E F \Gamma_{12}^1 + 2 E G \Gamma_{12}^2 + 2 E G \Gamma_{11}^1 + 2 F G \Gamma_{11}^2 - 2 F^2 \Gamma_{11}^1 - 2 F G \Gamma_{11}^2 - 2 E F \Gamma_{12}^1 - 2 F^2 \Gamma_{12}^2 \\
&= 2 E G \Gamma_{12}^2 + 2 E G \Gamma_{11}^1 - 2 F^2 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \\
&= 2 E G (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) - 2 F^2 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \\
&= 2 (E G - F^2) (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{(E G - F^2)_u}{2(E G - F^2)}.$$

□

Vamos agora ver que os símbolos de Christoffel só dependem das funções E, F, G e das suas derivadas.

Considerando o primeiro sistema do Lema 3

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

temos que,

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = E G - F^2.$$

Pela Proposição 9, $E G - F^2 > 0$.

Assim,

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 \neq 0$$

e o sistema tem solução única, dada por (Regra de Cramer)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & G \end{vmatrix}}{EG - F^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}E_u G - F F_u + \frac{1}{2}E_v F}{EG - F^2} \\ &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}E_u \\ F & F_u - \frac{1}{2}E_v \end{vmatrix}}{EG - F^2} \\ &= \frac{EF_u - \frac{1}{2}EE_v - \frac{1}{2}FE_u}{EG - F^2} \\ &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Resolvendo, de modo análogo, os dois sistemas seguintes do Lema 3, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Gamma_{12}^1 & = & \frac{G E_v - F G_u}{2(E G - F^2)} \\ \Gamma_{12}^2 & = & \frac{E G_u - F E_v}{2(E G - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 & = & \frac{2 G F_v - G G_u - F G_v}{2(E G - F^2)} \\ \Gamma_{22}^2 & = & \frac{E G_v - 2 F F_v + F G_u}{2(E G - F^2)} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Isto mostra que os símbolos de Christoffel só dependem de E, F, G e das suas derivadas. Pelo Teorema 5, concluímos que os símbolos de Christoffel são invariantes por isometria.

5.4 Teorema *Egregium de Gauss*

Teorema 9 (Teorema *Egregium de Gauss*). *A curvatura de Gauss é invariante por isometria. Mais precisamente, se $f : W \subseteq S_1 \longrightarrow S_2$ for uma isometria local então, para qualquer $p \in W$, a curvatura de S_1 em p é igual à curvatura de S_2 em $f(p)$.*

Demonstração. Da definição dos símbolos de Christoffel e de (5.6), (5.7) e (5.9) resulta que

$$\begin{aligned} \sigma_{uv} &= \left(\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + e \bar{N} \right)_v \\ &= \Gamma_{11v}^1 \sigma_u + \Gamma_{11v}^2 \sigma_v + e_v \bar{N} + \Gamma_{11}^1 \sigma_{uv} + \Gamma_{11}^2 \sigma_{vv} + e \bar{N}_v \\ &= \Gamma_{11v}^1 \sigma_u + \Gamma_{11v}^2 \sigma_v + e_v \bar{N} + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + f \bar{N}) + \\ &\quad + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + g \bar{N}) + e (a_{21} \sigma_u + a_{22} \sigma_v) \end{aligned}$$

$$= (\Gamma_{11v}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12}) \sigma_u + (\Gamma_{11v}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22}) \sigma_v + (e_v + \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g) \bar{N}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_{uvu} &= \left(\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + f \bar{N} \right)_u \\ &= \Gamma_{12u}^1 \sigma_u + \Gamma_{12u}^2 \sigma_v + f_u \bar{N} + \Gamma_{12}^1 \sigma_{uu} + \Gamma_{12}^2 \sigma_{vu} + f \bar{N}_u \\ &= \Gamma_{12u}^1 \sigma_u + \Gamma_{12u}^2 \sigma_v + f_u \bar{N} + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + e \bar{N}) + \\ &\quad + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 \sigma_u + \Gamma_{21}^2 \sigma_v + f \bar{N}) + f (a_{11} \sigma_u + a_{12} \sigma_v) \\ &= (\Gamma_{12u}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + f a_{11}) \sigma_u + (\Gamma_{12u}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \\ &\quad + f a_{12}) \sigma_v + (f_u + \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f) \bar{N}. \end{aligned}$$

Como $\sigma_{uvu} = \sigma_{uvu}$ e σ_u , σ_v e \bar{N} são linearmente independentes podemos concluir, igualando os coeficientes de σ_v das duas combinações lineares, que

$$(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{12}$$

ou seja,

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = e a_{22} - f a_{12}$$

onde

$$a_{12} = \frac{e F - f E}{E G - F^2} \quad \text{e} \quad a_{22} = \frac{f F - g E}{E G - F^2}.$$

Deste modo,

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = \frac{f F - g E}{E G - F^2} e - \frac{e F - f E}{E G - F^2} f$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{fFe - gEe - eFf + f^2E}{EG - F^2} \\
&= E \times \frac{f^2 - ge}{EG - F^2} \\
&= -E \times \frac{ge - f^2}{EG - F^2} \\
&= -E \times k.
\end{aligned}$$

Como a função E não se anula e por (5.10) podemos concluir que a curvatura de Gauss (k) de uma superfície regular só depende das funções E, F, G e das suas derivadas. Ou seja, a curvatura de Gauss é invariante por isometria.

□

Nos exemplos da secção 5.2, verificou-se que a curvatura de Gauss de uma esfera é diferente de zero e a de um plano é nula. Assim, em consequência do Teorema *Egregium* de Gauss, temos:

Corolário 1. *Não existe nenhuma isometria entre uma região qualquer da esfera e uma região do plano.*

O Teorema *Egregium* de Gauss esclarece, assim, a razão pela qual qualquer mapa plano, de qualquer região da Terra, distorce sempre as distâncias. Ou seja, numa projecção as relações de distância entre os vários locais da Terra nunca são totalmente respeitadas.

Capítulo 6

Propriedades das Projecções Cartográficas

Todas as projecções cartográficas envolvem deformações inevitáveis, que podem ser de ângulos, áreas ou distâncias.

Neste capítulo, desenvolve-se um estudo das principais propriedades/deformações das projecções abordadas no terceiro capítulo e concluir-se-á que cada projecção tem características distintas, que a tornam adequada para determinadas finalidades. Por isso, face ao número e diversidade de projecções actualmente existentes, a escolha de uma projecção deverá sempre ter em conta a área concreta a representar, bem como os objectivos do mapa a elaborar, o que implicará a consideração da preservação de determinadas propriedades. Por exemplo, as projecções conformes são importantes para os mapas destinados à navegação marítima.

6.1 Propriedades da Projecção Estereográfica

Consideremos a projecção estereográfica como uma aplicação

$$\begin{aligned}\mathcal{E} : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} = \mathcal{P}_{eq} \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)\end{aligned}$$

A aplicação \mathcal{E} é bijectiva e uma restrição de

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 1), x, y \in \mathbb{R}\} &\longrightarrow \mathcal{P}_{eq} \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right) \end{aligned}$$

que é suave.

Logo, pela Proposição 6, a aplicação \mathcal{E} é suave.

De modo análogo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{-1} : \mathcal{P}_{eq} &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ (x, y, 0) &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

é uma restrição de

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

que é suave.

Assim, podemos concluir que a aplicação \mathcal{E} é um difeomorfismo.

Teorema 10 (Imagem de um círculo pela projecção estereográfica). *Sejam S^2 uma esfera de centro O e $N \in S^2$. Considere-se a projecção estereográfica \mathcal{E} de pólo N . Tem-se:*

- i) A imagem de um círculo de S^2 que passa por N é uma recta do plano equatorial;*
- ii) A imagem de um círculo de S^2 que não passa por N é um círculo do plano equatorial.*

Demonstração. Um círculo na esfera é a intersecção da esfera com um plano não tangente à esfera.

Consideremos a esfera de raio unitário $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ não tangente à esfera, onde a, b e c não são simultaneamente nulos. Sabemos que uma parametrização de $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, é:

$$\sigma_N(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Seja $C_1 = S^2 \cap \pi$.

Como, mediante identificação do plano equatorial com \mathbb{R}^2 , σ_N é a inversa da projecção \mathcal{E} temos:

$$\mathcal{E}(C_1 \setminus \{N\}) = \{\mathcal{E}(M), M \in (S^2 \setminus \{N\}) \cap \pi\} = \{P \in \mathcal{P}_{eq} : \sigma_N(P) \in \pi\}.$$

Quais os pontos $P \in \mathcal{P}_{eq}$ tais que $\sigma_N(P) \in \pi$?

Substituindo $\sigma_N(P)$ na equação do plano, obtemos:

$$\frac{2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1} + d = 0$$

$$\Leftrightarrow 2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) + d(x^2 + y^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c + d)x^2 + (c + d)y^2 + 2ax + 2by + (d - c) = 0.$$

Um círculo na esfera passa pelo pólo norte, $N(0, 0, 1)$, se o plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ também passar pelo ponto, ou seja, se $c + d = 0$.

Assim,

- se o círculo na esfera passa pelo ponto N , a sua imagem no plano equatorial tem uma equação na forma

$$2ax + 2by + (d - c) = 0$$

onde a e b não são simultaneamente nulos, pois caso contrário $d - c = 0 \Leftrightarrow c = d$.

O que é absurdo, porque como $c + d = 0$, isto implicaria que $c = 0$ e, consequentemente, que a, b e c fossem simultaneamente nulos. Portanto, a imagem do círculo é uma recta.

- se o círculo na esfera não passa pelo ponto N , então $c + d \neq 0$ e a sua imagem é um círculo no plano equatorial, pois

$$(c + d)x^2 + (c + d)y^2 + 2ax + 2by + (d - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2ax}{c + d} + \frac{2by}{c + d} + \frac{d - c}{c + d} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2ax}{c+d} + \left(\frac{a}{c+d}\right)^2 - \left(\frac{a}{c+d}\right)^2 + y^2 + \frac{2by}{c+d} + \left(\frac{b}{c+d}\right)^2 - \left(\frac{b}{c+d}\right)^2 + \frac{d-c}{c+d} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{c+d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2}{(c+d)^2} + \frac{b^2}{(c+d)^2} + \frac{c-d}{c+d}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{c+d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{(c+d)^2}$$

\Downarrow

equação de um círculo de centro $\left(-\frac{a}{c+d}, -\frac{b}{c+d}, 0\right)$ e raio $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}}{|c+d|}$ se $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 > 0$.

Vejam, de facto, que $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 > 0$.

Como a intersecção do plano π com a esfera é um círculo não tangente, então existe pelo menos um ponto $(x, y, z) \in \pi$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

- Se o plano π contém o centro da esfera, então $d = 0$ e como a , b e c não são simultaneamente nulos, temos que $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 > 0$.
- Se o plano não contém o centro da esfera e considerando o ponto $Q(x, y, z)$ a projecção ortogonal do centro da esfera no plano π , temos que

$$\forall M \in \pi \setminus \{Q\}, \overline{OQ} < \overline{OM} \quad (\text{pelo Teorema de Pitágoras no } \Delta[OMQ]) \quad (6.1)$$

isto é, Q é o ponto do plano mais próximo do centro da esfera. Ou seja, Q é o mínimo da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$, onde $g(x, y, z) = ax + by + cz + d$. De (6.1) podemos, ainda, afirmar que $\overline{OQ} < 1$.

Para procurar as coordenadas do ponto Q podemos recorrer ao Método dos Multiplicadores de Lagrange. Como f e g são funções contínuas e diferenciáveis e $\nabla g(x, y, z) \neq 0$, para determinar o extremo temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0 \end{cases}$$

onde o escalar λ é o designado multiplicador de Lagrange.

Ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x - \lambda a & = & 0 \\ 2y - \lambda b & = & 0 \\ 2z - \lambda c & = & 0 \\ ax + by + cz + d & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{\lambda a}{2} \\ y & = & \frac{\lambda b}{2} \\ z & = & \frac{\lambda c}{2} \\ ax + by + cz + d & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\lambda \frac{a^2}{2} + \lambda \frac{b^2}{2} + \lambda \frac{c^2}{2} + d = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Assim, as coordenadas do ponto $Q(x, y, z)$ são:

$$\left(\frac{a d}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b d}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c d}{a^2 + b^2 + c^2} \right).$$

Como $\overline{OQ} < 1$, temos

$$\sqrt{\left(\frac{a d}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 + \left(\frac{b d}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 + \left(\frac{c d}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 d^2 + b^2 d^2 + c^2 d^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{d^2 (a^2 + b^2 + c^2)} < a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 (a^2 + b^2 + c^2) < (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 < a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d^2 > 0.$$

□

Observe-se que a imagem de S (pólo sul) pela projecção estereográfica \mathcal{E} é o centro da esfera.

Um paralelo é a intersecção de S^2 com um plano de equação $\pi : cz + d = 0$, $c \neq 0$ e $c + d \neq 0$.

Este plano não passa por N , logo a imagem do círculo no plano equatorial é um círculo de centro $(0, 0, 0)$ e raio $\frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{|c + d|}$.

Um meridiano é a intersecção de S^2 com um plano, perpendicular ao plano equatorial, de equação $\pi : ax + by = 0$, onde a e b não são simultaneamente nulos. O plano π passa por N , logo a imagem do meridiano no plano equatorial é a recta de equação $2ax + 2by = 0 \Leftrightarrow ax + by = 0$.

Assim, na projecção estereográfica as imagens dos meridianos são rectas que passam pelo centro O da esfera e as imagens dos paralelos são circunferências concêntricas de centro O .

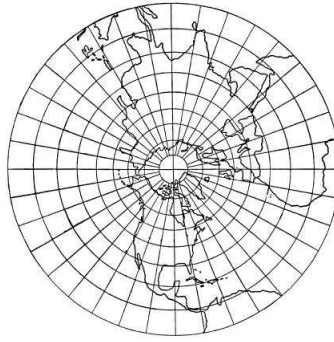


Figura 6.1: Hemisfério norte numa projecção estereográfica. [40]

Como

- $\frac{\partial \sigma_N}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{2(-x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{4x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$
- $\frac{\partial \sigma_N}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{2(x^2 - y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{4y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$

os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned}
 E_1(x, y) &= \left\langle \frac{\partial \sigma_N}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \sigma_N}{\partial x}(x, y) \right\rangle \\
 &= \frac{4(-x^2 + y^2 + 1)^2}{(x^2 + y^2 + 1)^4} + \frac{16x^2y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^4} + \frac{16x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{4x^4 - 8x^2y^2 - 8x^2 + 8y^2 + 4y^4 + 4 + 16x^2y^2 + 16x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{4(x^4 + y^4 + 2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{4(x^2 + y^2 + 1)^2}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1(x, y) &= \left\langle \frac{\partial \sigma_N}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \sigma_N}{\partial y}(x, y) \right\rangle \\
 &= \frac{-8xy(-x^2 + y^2 + 1) - 8xy(x^2 - y^2 + 1) + 16xy}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{8x^3y - 8xy^3 - 8xy - 8x^3y + 8xy^3 - 8xy + 16xy}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_1(x, y) &= \left\langle \frac{\partial \sigma_N}{\partial y}(x, y), \frac{\partial \sigma_N}{\partial y}(x, y) \right\rangle \\
 &= \frac{16x^2y^2 + 4(x^2 - y^2 + 1)^2 + 16y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{16x^2y^2 + 4x^4 + 4y^4 - 8x^2y^2 + 8x^2 - 8y^2 + 4 + 16y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4(2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 + x^4 + y^4 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \\
&= \frac{4(x^2 + y^2 + 1)^2}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \\
&= \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, a parametrização do plano $z = 0$ é a aplicação

$$\psi(x, y) = P + ux + vy, \quad u, v \in \mathbb{R}; \quad x = (1, 0, 0); \quad y = (0, 1, 0); \quad P = (0, 0, 0).$$

Como vimos anteriormente, os coeficientes da primeira forma fundamental de ψ são

$$\begin{aligned}
E_2(x, y) &= 1 \\
F_2(x, y) &= 0 \\
G_2(x, y) &= 1.
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que para

$$\lambda(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$E_1(x, y) = \lambda(x, y)E_2(x, y)$$

$$F_1(x, y) = \lambda(x, y)F_2(x, y)$$

$$G_1(x, y) = \lambda(x, y)G_2(x, y).$$

Ou seja, pelo Teorema 6, a aplicação \mathcal{E} é **conforme**.

Verifica-se, ainda, que:

$$\begin{aligned}
\bullet E_1 G_1 - F_1^2 &= \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \times \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} - 0 \\
&= \frac{16}{(x^2 + y^2 + 1)^4}
\end{aligned}$$

$$\bullet E_2 G_2 - F_2^2 = 1 \times 1 - 0 = 1$$

isto é,

$$E_1 G_1 - F_1^2 \neq E_2 G_2 - F_2^2.$$

Assim, pelo Teorema 7, a projecção estereográfica **não é equiareal**.

Observe-se que na projecção estereográfica estudada, a partir do pólo norte sobre o plano equatorial, as regiões próximas do Equador sofrem distorções mínimas, pois $x^2 + y^2 \approx 1$ e $E_1 G_1 - F_1^2 \approx 1$; as regiões polares exibem as deformações máximas, pois $E_1 G_1 - F_1^2$ é máximo com $x^2 + y^2 = 0$.

Por outro lado, se pretendermos representar as zonas polares num mapa, a projecção estereográfica, em que o plano de projecção é tangente à superfície da Terra no pólo pretendido, é a indicada. Esta característica da projecção estereográfica permite colmatar a grande lacuna da projecção de Mercator, projecção onde as regiões polares sofrem deformações acentuadas.

6.2 Propriedades das Projecções Cilíndricas

Para o estudo das propriedades das projecções cilíndricas abordadas no capítulo 3, vamos considerar a parametrização de C^* (de altura $2h$) dada por

$$\begin{aligned} \Phi :]-\pi, \pi[\times]-h, h[&\longrightarrow C^* \\ (\varphi, z) &\longmapsto (\cos \varphi, \sin \varphi, z) \end{aligned}$$

e a respectiva parametrização de S_*^2 , $\sigma_2 = \pi_c^{-1} \circ \Phi$.

Recorda-se que em todos os casos a aplicação π_c^{-1} é um difeomorfismo.

6.2.1 Projecção de Arquimedes

Consideremos a projecção de Arquimedes

$$\begin{aligned} \pi_c : S_*^2 &\longrightarrow C^* \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) \end{aligned}$$

em que C^* é o cilindro de altura 2 ($h = 1$) e

$$\begin{aligned}\sigma_2 = \pi_c^{-1} \circ \Phi :]-\pi, \pi[\times]-1, 1[&\longrightarrow S_*^2 \\ (\varphi, z) &\longmapsto \left(\cos \varphi \sqrt{1-z^2}, \sin \varphi \sqrt{1-z^2}, z \right)\end{aligned}$$

é uma parametrização de S_*^2 .

Os coeficientes da primeira forma fundamental de $\Phi(\varphi, z)$ são:

- $E_1(\varphi, z) = 1$
- $F_1(\varphi, z) = 0$
- $G_1(\varphi, z) = 1.$

Para $\sigma_2(\varphi, z)$, temos

- $\frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi}(\varphi, z) = \left(-\sin \varphi \sqrt{1-z^2}, \cos \varphi \sqrt{1-z^2}, 0 \right)$
- $\frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) = \left(-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos \varphi, -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin \varphi, 1 \right)$

$$\begin{aligned}E_2(\varphi, z) &= \left\langle \left(-\sin \varphi \sqrt{1-z^2}, \cos \varphi \sqrt{1-z^2}, 0 \right), \left(-\sin \varphi \sqrt{1-z^2}, \cos \varphi \sqrt{1-z^2}, 0 \right) \right\rangle \\ &= \sin^2 \varphi (1-z^2) + \cos^2 \varphi (1-z^2) + 0 \\ &= 1-z^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2(\varphi, z) &= \left\langle \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi}(\varphi, z), \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(-\sin \varphi \sqrt{1-z^2}, \cos \varphi \sqrt{1-z^2}, 0 \right), \left(-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos \varphi, -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin \varphi, 1 \right) \right\rangle \\ &= -z \sin \varphi \cos \varphi - z \cos \varphi \sin \varphi + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$G_2(\varphi, z) = \left\langle \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z), \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \left(-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos \varphi, -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \operatorname{sen} \varphi, 1 \right), \left(-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos \varphi, -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \operatorname{sen} \varphi, 1 \right) \right\rangle \\
&= \frac{z^2}{1-z^2} \cos^2 \varphi + \frac{z^2}{1-z^2} \operatorname{sen}^2 \varphi + 1 \\
&= \frac{z^2}{1-z^2} + 1 \\
&= \frac{1}{1-z^2}.
\end{aligned}$$

As primeiras formas fundamentais de σ_2 e Φ não são proporcionais, por isso, a projecção de Arquimedes **não é conforme**.

Mas

$$\begin{aligned}
&\bullet E_1 G_1 - F_1^2 = 1 \\
&\bullet E_2 G_2 - F_2^2 = (1-z^2) \left(\frac{1}{1-z^2} \right) - 0 = \frac{1-z^2}{1-z^2} = 1
\end{aligned}$$

isto é,

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2.$$

Assim, a projecção de Arquimedes **é equiareal**.

6.2.2 Projecção Cilíndrica Central

Consideremos a projecção central

$$\begin{aligned}
\pi_c : S_*^2 &\longrightarrow C^* \\
(x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)
\end{aligned}$$

em que C^* é o cilindro de altura infinita (“ $h = +\infty$ ”) e

$$\begin{aligned}
\sigma_2 = \pi_c^{-1} \circ \Phi :]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} &\longrightarrow S_*^2 \\
(\varphi, z) &\longmapsto \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)
\end{aligned}$$

é uma parametrização de S_*^2 .

Para $\sigma_2(\varphi, z)$, temos

$$\bullet \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi}(\varphi, z) = \left(-\frac{\text{sen } \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, 0 \right)$$

$$\bullet \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) = \left(-\frac{z \cos \varphi}{(\sqrt{1+z^2})^3}, -\frac{z \text{sen } \varphi}{(\sqrt{1+z^2})^3}, \frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^3} \right)$$

$$\begin{aligned} E_2(\varphi, z) &= \left\langle \left(-\frac{\text{sen } \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, 0 \right), \left(-\frac{\text{sen } \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, 0 \right) \right\rangle \\ &= \frac{\text{sen}^2 \varphi}{1+z^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{1+z^2} + 0 \\ &= \frac{1}{1+z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\varphi, z) &= \left\langle \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi}(\varphi, z), \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(-\frac{\text{sen } \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1+z^2}}, 0 \right), \left(-\frac{z \cos \varphi}{(\sqrt{1+z^2})^3}, -\frac{z \text{sen } \varphi}{(\sqrt{1+z^2})^3}, \frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^3} \right) \right\rangle \\ &= \frac{z \text{sen } \varphi \cos \varphi}{(\sqrt{1+z^2})^4} - \frac{z \cos \varphi \text{sen } \varphi}{(\sqrt{1+z^2})^4} + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(\varphi, z) &= \left\langle \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z), \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^3} (-z \cos \varphi, -z \text{sen } \varphi, 1), \frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^3} (-z \cos \varphi, -z \text{sen } \varphi, 1) \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z^2 \cos^2 \varphi}{\left(\sqrt{1+z^2}\right)^6} + \frac{z^2 \sin^2 \varphi}{\left(\sqrt{1+z^2}\right)^6} + \frac{1}{\left(\sqrt{1+z^2}\right)^6} \\
&= \frac{1+z^2}{\left(\sqrt{1+z^2}\right)^6} \\
&= \frac{1}{(1+z^2)^2}.
\end{aligned}$$

As primeiras formas fundamentais de σ_2 e Φ não são proporcionais, por isso, a projecção Central não é conforme.

Por outro lado,

$$\bullet E_1 G_1 - F_1^2 = 1$$

$$\bullet E_2 G_2 - F_2^2 = \frac{1}{1+z^2} \times \left(\frac{1}{(1+z^2)^2} \right) - 0 = \frac{1}{(1+z^2)^3}$$

ou seja,

$$E_1 G_1 - F_1^2 \neq E_2 G_2 - F_2^2.$$

Assim, a projecção Central também não é equiareal.

6.2.3 Projecção Equidistante Meridiana

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned}
\pi_c : S_*^2 &\longrightarrow C^* \\
(x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \arcsen z \right)
\end{aligned}$$

em que C^* é o cilindro de altura π $\left(h = \frac{\pi}{2}\right)$ e

$$\begin{aligned}
\sigma_2 = \pi_c^{-1} \circ \Phi :]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\longrightarrow S_*^2 \\
(\varphi, z) &\longmapsto (\cos \varphi \cos z, \sin \varphi \cos z, \sin z)
\end{aligned}$$

é uma parametrização de S_*^2 .

Para $\sigma_2(\varphi, z)$, temos

- $\frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi}(\varphi, z) = (-\operatorname{sen} \varphi \cos z, \cos \varphi \cos z, 0)$
- $\frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) = (-\operatorname{sen} z \cos \varphi, -\operatorname{sen} z \operatorname{sen} \varphi, \cos z)$

$$\begin{aligned} E_2(\varphi, z) &= \langle (-\operatorname{sen} \varphi \cos z, \cos \varphi \cos z, 0), (-\operatorname{sen} \varphi \cos z, \cos \varphi \cos z, 0) \rangle \\ &= \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 z + \cos^2 \varphi \cos^2 z + 0 \\ &= \cos^2 z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\varphi, z) &= \langle (-\operatorname{sen} \varphi \cos z, \cos \varphi \cos z, 0), (-\operatorname{sen} z \cos \varphi, -\operatorname{sen} z \operatorname{sen} \varphi, \cos z) \rangle \\ &= \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} z \cos z - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} z \cos z + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(\varphi, z) &= \langle (-\operatorname{sen} z \cos \varphi, -\operatorname{sen} z \operatorname{sen} \varphi, \cos z), (-\operatorname{sen} z \cos \varphi, -\operatorname{sen} z \operatorname{sen} \varphi, \cos z) \rangle \\ &= \operatorname{sen}^2 z \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 z \operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 z \\ &= \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z \\ &= 1. \end{aligned}$$

As primeiras formas fundamentais de σ_2 e Φ não são proporcionais, por isso, a projecção equidistante meridiana não é conforme.

Por outro lado,

- $E_1 G_1 - F_1^2 = 1$
- $E_2 G_2 - F_2^2 = \cos^2 z \times 1 - 0 = \cos^2 z$

ou seja,

$$E_1 G_1 - F_1^2 \neq E_2 G_2 - F_2^2.$$

Assim, esta projecção também não é equiareal.

6.2.4 Projecção de Mercator

Consideremos a projecção de Mercator

$$\begin{aligned} \pi_c : S_*^2 &\longrightarrow C^* \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \operatorname{argth} z \right) \end{aligned}$$

em que C^* é o cilindro de altura infinita (“ $h = +\infty$ ”) e

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \pi_c^{-1} \circ \Phi :]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} &\longrightarrow S_*^2 \\ (\varphi, z) &\longmapsto (\cos \varphi \operatorname{sech} z, \sin \varphi \operatorname{sech} z, \operatorname{th} z) \end{aligned}$$

é uma parametrização de S_*^2 .

Para $\sigma_2(\varphi, z)$, temos

- $\frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi}(\varphi, z) = (-\operatorname{sech} z \sin \varphi, \operatorname{sech} z \cos \varphi, 0)$
- $\frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) = (-\operatorname{sech} z \operatorname{th} z \cos \varphi, -\operatorname{sech} z \operatorname{th} z \sin \varphi, \operatorname{sech}^2 z)$
- $E_2(\varphi, z) = \left\langle \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi}(\varphi, z), \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi}(\varphi, z) \right\rangle$
 $= \operatorname{sech}^2 z \sin^2 \varphi + \operatorname{sech}^2 z \cos^2 \varphi$
 $= \operatorname{sech}^2 z$
- $F_2(\varphi, z) = \left\langle \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi}(\varphi, z), \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) \right\rangle$
 $= \operatorname{sech}^2 z \operatorname{th} z \sin \varphi \cos \varphi - \operatorname{sech}^2 z \operatorname{th} z \sin \varphi \cos \varphi$
 $= 0$
- $G_2(\varphi, z) = \left\langle \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z), \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(\varphi, z) \right\rangle$
 $= \operatorname{sech}^2 z \operatorname{th}^2 z \cos^2 \varphi + \operatorname{sech}^2 z \operatorname{th}^2 z \sin^2 \varphi + \operatorname{sech}^4 z$
 $= \operatorname{sech}^2 z \operatorname{th}^2 z + \operatorname{sech}^4 z$
 $= \operatorname{sech}^2 z (\operatorname{th}^2 z + \operatorname{sech}^2 z)$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sech}^2 z \left(\frac{sh^2 z}{ch^2 z} + \frac{1}{ch^2 z} \right) \\
&= \operatorname{sech}^2 z \left(\frac{1 + sh^2 z}{ch^2 z} \right) \\
&= \operatorname{sech}^2 z \left(\frac{ch^2 z}{ch^2 z} \right) \\
&= \operatorname{sech}^2 z.
\end{aligned}$$

Para $\lambda = \operatorname{sech}^2 z$

$$E_2 = \lambda E_1, F_2 = \lambda F_1, G_2 = \lambda G_1$$

ou seja, a projecção de Mercator é **conforme**.

Contudo

$$\begin{aligned}
\bullet E_1 G_1 - F_1^2 &= 1 \\
\bullet E_2 G_2 - F_2^2 &= \operatorname{sech}^2 z \operatorname{sech}^2 z = \operatorname{sech}^4 z
\end{aligned}$$

pelo que

$$E_1 G_1 - F_1^2 \neq E_2 G_2 - F_2^2$$

isto é: esta projecção distorce as áreas.

Como já foi referido, regiões situadas em altas latitudes, no mapa de Mercator, sofrem deformações consideráveis.

Como última propriedade, da projecção de Mercator, vamos verificar que, neste mapa, as loxodromias são representadas por rectas.

Recordemos que no mapa de coordenadas geográficas, (φ, θ) , as loxodromias verificam

$$\varphi = \operatorname{tg} \beta \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right| + k \right) \vee \varphi = -\operatorname{tg} \beta \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right| + k \right), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}}{1 - \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}} \\
 &= \frac{1 + \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}}{1 - \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}} \times \frac{1 + \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}}{1 + \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}} \\
 &= \frac{1 + 2 \times \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} + \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}{1 - \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\
 &= \frac{2}{1 + \cos \theta} + \frac{2\sqrt{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}}{\frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\
 &= \frac{2 + 2 \operatorname{sen} \theta}{2 \cos \theta} \\
 &= \sec \theta + \operatorname{tg} \theta
 \end{aligned}$$

e como a latitude no mapa de Mercator é dada por $\tilde{\theta} = \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|$

temos

$$\varphi = \operatorname{tg} \beta (\tilde{\theta} + k) \vee \varphi = -\operatorname{tg} \beta (\tilde{\theta} + k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, as loxodromias são rectas.

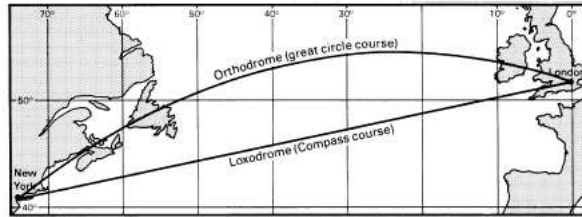


Figura 6.2: Loxodromia e arco de círculo máximo na projecção de Mercator. [40]

Capítulo 7

Ciências Exactas e Humanas - Proposta de Articulação

A Matemática sempre permeou a actividade humana e contribuiu para o seu desenvolvimento. Neste capítulo, apresentamos uma actividade interdisciplinar que realça a conexão entre a Matemática e a Geografia e que, simultaneamente, permite explorar alguns conceitos matemáticos.

Quem viaja de Londres para Los Angeles costuma passar pelo sul da Gronelândia e Canadá. Olhando para o mapa, parece que o avião fez um desvio, contudo, quem olhar para um globo, repara que terá viajado pelo caminho mais curto, o qual corresponde ao arco menor do círculo máximo que une as duas cidades (arco geodésico).¹



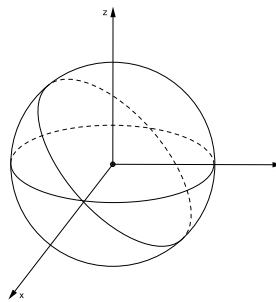
Figura 7.1: Geodésica entre Londres e Los Angeles. Gerada em [31] e retirada em [7]

¹A figura 7.1 é usada com permissão da Springer Science + Business Media.

A actividade tem como objectivos: sensibilizar o aluno para o facto de que as distâncias, entre dois locais, determinadas por meio de um mapa plano não correspondem em geral às distâncias reais; ensinar a determinar a distância real entre dois pontos do globo terrestre a partir das suas coordenadas geográficas (latitude e longitude).

Vamos começar por recordar alguns conceitos:

- Numa esfera, um **círculo máximo** é a intersecção da esfera com um plano que passa pelo centro da esfera. À recta que passa pelo centro da esfera e que é perpendicular ao plano do círculo máximo chamamos **eixo do círculo máximo**. O eixo de um círculo máximo intersecta a esfera em dois pontos chamados pólos do círculo máximo.



- **Eixo da Terra** - linha imaginária em torno da qual a Terra realiza o seu movimento de rotação de Oeste para Este.

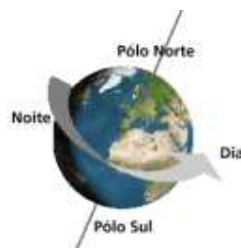


Figura 7.2: Eixo da Terra. [27]

- **Equador** - linha imaginária que resulta da intersecção da superfície terrestre com o plano que contém o seu centro e que é perpendicular ao eixo de rotação. O Equador divide a superfície terrestre em dois hemisférios: hemisfério norte e hemisfério sul.

- **Meridianos** - são semi-círculos máximos que passam pelos pólos norte e sul.
- **Meridiano de Greenwich** - meridiano que passa pelo Observatório de Greenwich, Inglaterra. Desde 1884, por convenção internacional, é utilizado como referência (origem) para determinar as longitudes.
- **Paralelos** - são círculos paralelos ao Equador. O Equador também é um paralelo e é o único que é um círculo máximo.

Seja M um ponto da superfície terrestre diferente dos pólos e M' a intersecção do Equador (círculo máximo) com o meridiano que passa por M .

- **Latitude Geográfica de M (θ)** - Se M pertence ao Equador a sua latitude é 0° . Se M está no hemisfério norte, a sua latitude é a medida em graus do ângulo $\angle M'OM$. Se M está no hemisfério sul, a sua latitude é $-\angle M'OM$.

A latitude é um valor que pertence ao intervalo $] - 90^\circ, 90^\circ[$.

Esta definição pode ser estendida aos pólos, considerando a latitude do pólo norte 90° e do pólo sul $- 90^\circ$.

- **Longitude Geográfica de M (φ)** - Seja M_0 a intersecção do meridiano Greenwich com o Equador. A longitude de M é a medida em graus do ângulo orientado $\angle M_0OM'$. A longitude é um valor que pertence ao intervalo $] - 180^\circ, 180^\circ]$.

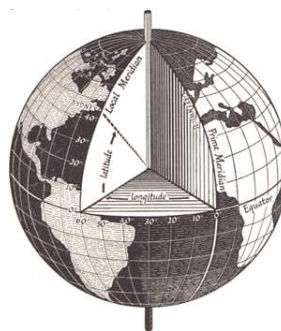


Figura 7.3: Coordenadas geográficas de um ponto no globo terrestre. [39]

Distância entre dois pontos quaisquer da Terra num Mapa e no Globo Terrestre

A distância entre duas localidades num mapa plano - superfície que foi estudada em detalhe por Euclides, na sua obra *Elementos*, escrita durante o séc. III a. C. e na qual referiu que a principal propriedade da recta é o facto de minimizar a distância entre quaisquer dois dos seus pontos - é dada pelo segmento de recta que une essas localidades.

Por exemplo, no mapa abaixo representado a distância entre as cidades de Londres e Los Angeles é:



Figura 7.4: Distância num mapa entre as cidades de Londres e Los Angeles. [32]

$$\begin{aligned}\frac{0,9}{2000} &= \frac{4,6}{x} \\ x &= \frac{4,6 \times 2000}{0,9} \\ &\approx 10222 \text{ km.}\end{aligned}$$

No entanto, o segmento de recta representado no mapa plano não corresponde à trajectória do caminho mais curto entre as duas cidades, pois este é o arco menor do círculo máximo que passa pelas cidades. Assim, no globo a distância entre estas duas cidades é dada pelo comprimento do arco menor do círculo máximo que passa pelas cidades.

Vejamos, então, como determinar a distância entre dois pontos quaisquer da Terra (considerada esférica) no globo.

Sejam A e B dois pontos com latitudes θ_1 e θ_2 e longitudes φ_1 e φ_2 , respectivamente. As coordenadas geográficas dos pontos, deduzidas no capítulo 2, são:

$$A (r \cos \theta_1 \cos \varphi_1, r \cos \theta_1 \sin \varphi_1, r \sin \theta_1)$$

$$B (r \cos \theta_2 \cos \varphi_2, r \cos \theta_2 \sin \varphi_2, r \sin \theta_2).$$

Como o centro do círculo máximo que passa por A e B coincide com o centro da esfera e o comprimento do segmento de recta $[OA]$ é igual ao raio do círculo máximo, a amplitude do $\angle AOB$ vai permitir determinar a distância entre os dois pontos.

Considerando

$$A\hat{O}B = \alpha$$

sabemos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle &= \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|} \\ \Rightarrow \alpha &= \arccos \left(\frac{\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|} \right). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle &= \\ &= \langle (r \cos \theta_1 \cos \varphi_1, r \cos \theta_1 \sin \varphi_1, r \sin \theta_1), (r \cos \theta_2 \cos \varphi_2, r \cos \theta_2 \sin \varphi_2, r \sin \theta_2) \rangle \\ &= r^2 \cos \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 + r^2 \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 + r^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= r^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + r^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

e

$$\cos (\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

logo

$$\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = r^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + r^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \left(\frac{r^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + r^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2}{r \times r} \right) \\ &= \arccos (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2).\end{aligned}$$

Concluimos, assim, que a distância entre dois pontos quaisquer da Terra é dada por

$$d_{(A,B)} = r \arccos \left(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \right)$$

Vamos, agora, determinar a distância entre as cidades de Londres e Los Angeles.

<i>Londres</i>	$\theta_1 = 51^\circ 32' N$	$\varphi_1 = 0^\circ 5' W$
<i>Los Angeles</i>	$\theta_2 = 34^\circ 3' N$	$\varphi_2 = 118^\circ 15' W$

Em radianos, temos

$$\theta_1 = 51^\circ 32' \approx 51,53^\circ \longrightarrow \frac{51,53 \pi}{180}$$

$$\theta_2 = 34^\circ 3' \approx 34,05^\circ \longrightarrow \frac{34,05 \pi}{180}$$

$$\varphi_1 = 0^\circ 5' \approx 0,08^\circ \longrightarrow \frac{-8 \pi}{180}$$

$$\varphi_2 = 118^\circ 15' \approx 118,25^\circ \longrightarrow \frac{-118 \pi}{180}$$

Assim, a distância entre as cidades, no globo, é dada por

$$\begin{aligned}d &= 6378 \times \arccos \left(\cos \frac{51,53 \pi}{180} \cos \frac{34,05 \pi}{180} \cos \left(\frac{-8 \pi}{180} - \frac{-118 \pi}{180} \right) + \operatorname{sen} \frac{51,53 \pi}{180} \operatorname{sen} \frac{34,05 \pi}{180} \right) \\ &\approx 9156 \text{ km}.\end{aligned}$$

Distância entre dois pontos da Terra situados no Equador ou no mesmo meridiano

Quando se pretende determinar a distância entre dois pontos, A e B , situados no mesmo meridiano ou no Equador a amplitude do ângulo ao centro, $\angle AOB$, exprime-se em termos das latitudes e longitudes dos pontos e, por isso, mais fácil de determinar.

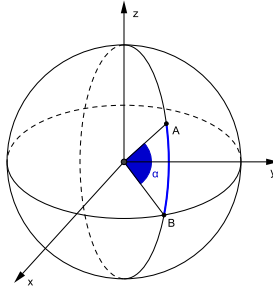


Figura 7.5: Arco menor de um círculo máximo.

Ou seja,

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi r}{d_{(A,B)}}$$

$$\Leftrightarrow d_{(A,B)} = \frac{2\pi r \times \alpha}{360}$$

Se α estiver em radianos, $d_{(A,B)} = r \times \alpha$.

Para pontos que estão situados no mesmo meridiano, a diferença entre as latitudes pode ser utilizada para determinar a amplitude do ângulo α . Para pontos que estão situados no Equador, será a diferença das longitudes.

Por exemplo, as cidades de Braga e Coimbra estão, aproximadamente, situadas no mesmo meridiano.

Coordenadas ²:

<i>Braga</i>	$\theta_1 = 41^\circ 35' N$	$\varphi_1 = 8^\circ 25' W$
<i>Coimbra</i>	$\theta_2 = 40^\circ 13' N$	$\varphi_2 = 8^\circ 26' W$

Para determinar a distância entre estas duas cidades, vamos começar por determinar a amplitude do ângulo α .

$$\begin{aligned}\alpha &= \theta_1 - \theta_2 \\ &= 41,58^\circ - 40,22^\circ \\ &= 1,36^\circ\end{aligned}$$

²<http://pagesperso-orange.fr/universimmedia/geo/loc.htm>

Como o raio da Terra é aproximadamente 6378 km, temos

$$\frac{360^\circ}{2\pi \times 6378} = \frac{1,36^\circ}{x}$$

$$x = \frac{1,36 \times 2\pi \times 6378}{360}$$

$$\approx 151 \text{ km.}$$

Obtivemos, assim, um valor aproximado da distância entre as cidades de Braga e Coimbra no globo terrestre.

Num mapa plano obtido através de uma projecção cilíndrica, os meridianos e o Equador são representados por segmentos de recta. Assim, no caso das cidades de Braga e Coimbra, o caminho mais curto no mapa corresponde ao caminho mais curto no globo.

Vamos, então, determinar a distância entre estas duas cidades num mapa plano.



Figura 7.6: Distância num mapa entre as cidades de Braga e Coimbra. [32]

Recorrendo à escala do mapa, temos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{200} &= \frac{1,6}{x} \\ x &= \frac{1,6 \times 200}{2} \\ &= 160 \text{ km.}\end{aligned}$$

Como numa projecção cilíndrica os meridianos são no mapa plano rectas e apesar de todo o processo de medição contemplar erros (controláveis, mas que não podem ser ignorados), podemos verificar que no mapa houve uma pequena distorção da distância entre estas duas cidades. Se considerarmos locais geograficamente mais afastados, essas distorções serão mais acentuadas. Por exemplo, num mapa obtido com a mesma projecção do mapa acima, a distância entre Barcelona (latitude - $41^{\circ}25'$, longitude - $2^{\circ}10'$) e Versailhes (perto de Paris, latitude - $48^{\circ}48'$, longitude - $2^{\circ}08'$), que estão aproximadamente sobre o mesmo meridiano, é 767 km enquanto que a distância no globo é 822 km .

De facto, como foi demonstrado no capítulo 5, é impossível elaborar um mapa plano de uma porção da superfície terrestre que represente distâncias com total precisão.

Bibliografia

- [1] ARAÚJO, Paulo Ventura, *Geometria Diferencial*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.
- [2] CARMO, Manfredo P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [3] CRATO, Nuno, *A Matemática das Coisas*, Gradiva, 2008.
- [4] DIAS, M. Helena, *Cartografia Temática, Programa*, Centro de Estudos Geográficos, Área de Investigação de Geo-Ecologia, Relatório n° 6, 2007.
- [5] ESTRADA, Maria Fernanda; SÁ, Carlos Correia; QUEIRÓ, João Filipe; SILVA, Maria do Céu; COSTA, Maria José, *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.
- [6] GASPAR, Joaquim Alves, *Cartas e Projecções Cartográficas*, 3ª Edição, Lidel - Edições Técnicas, 2005.
- [7] JENNINGS, George A., Spherical Geometry, In *Modern Geometry with Applications*, Springer, 1994.
- [8] LANG, Serge, *Calculus of Several Variables*, Third Edition, Springer-Verlag, 1995.
- [9] LIMA, Elon Lages, *Curso de análise*, Vol. II, 3ª Edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981.
- [10] MAOR, Eli, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, New Jersey, 1998, pp. 165-180.

- [11] MARSDEN, Jerrold E.; TROMBA, Anthony J., *Vector Calculus*, Fifth Edition, W.H.Freeman and Company, New York.
- [12] McCLEARY, John, *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, 1997.
- [13] MIGUENS, Altineu Pires, *Navegação: A Ciência e a Arte*, Vol. I, Navegação Costeira, Estimada e em Águas Restritas. DHN.
- [14] NETO, Orlando, *Tópicos de Geometria*, Universidade Aberta, 1999.
- [15] OSTROWSKI, Alexander, *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, Vol. I, 5ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, 1960.
- [16] PICADO, Jorge, *Apontamentos de Geometria Diferencial*, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 2006.

(<http://www.mat.uc.pt/picado/geomdif/0405/Apontamentos/sI1.pdf>)
- [17] PISKOUNOV, N., *Cálculo Diferencial e Integral*, Vol. II, 9ª Edição, Edições Lopes da Silva, 1990.
- [18] PRESSLEY, Andrew, *Elementary Differential Geometry*, Springer-Verlag, 2001.
- [19] QUEIRÓ, João Filipe, *Pedro Nunes e as Linhas de Rumor*, Gazeta de Matemática, n° 143, SPM, 2002, pp. 42-47.
- [20] RAISZ, Erwin, *Cartografia Geral*, Editora Científica, 1969.
- [21] SANTOS, Fernando Borja, *Sebenta de Matemáticas Gerais-Álgebra Linear*, 11ª Edição, Plátano Editora, 1997.
- [22] SANTOS, Lisa, *Tópicos de Análise Real*, 2ª Edição, Departamento de Matemática da Universidade do Minho, 2004.
- [23] STILLWELL, John, *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, 1992.
- [24] STRUIK, Dirk J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Second Edition, Dover Publications, INC.

- [25] STRUIK, Dirk J., *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, 1992.
- [26] TUCHINSKY, Philip M., Mercator's World Map and the Calculus, Module 206, In *UMAP- Modules and Monographs in Undergraduate Mathematics and its Applications Project*, Cambridge, 1981.
- [27] http://www.cienciaviva.pt/equinocio/lat_long/cap2.asp
- [28] http://nationalatlas.gov/articles/mapping/a_projections.html
- [29] http://vidareal.files.wordpress.com/2008/03/t_and_o_map_guntherus_ziner_1472.jpg
- [30] <http://www.mcescher.com/Gallery/recogn-bmp/LW428.jpg>
- [31] <http://www.daftlogic.com/projects-google-maps-distance-calculator.htm>
- [32] <http://www.googlemaps.com>
- [33] <http://www.henry-davis.com>
- [34] <http://grecoantiga.org/img/i/i026.jpg>
- [35] http://en.wikipedia.org/wiki/Mercator_projection
- [36] <http://pt.wikipedia.org>
- [37] <http://www.nerosumi.com/er/113.html>
- [38] http://www.melhorsoft.com/detalhes/balistica/imagens/tle_002.jpg
- [39] http://makingmaps.files.wordpress.com/2008/02/lat_long_globe.jpg
- [40] http://press.princeton.edu/books/maor/chapter_13.pdf
- [41] <http://mathworld.wolfram.com/MercatorProjection.html>
- [42] http://milamar.net/index.php?option=com_contenttask=viewid=1Itemid=1
- [43] <http://geografiabrasil.meshfriends.com>